

# 幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

anwendeng

typesetted by  $\LaTeX$ with Beamer class

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

2 × 2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術





大師高德納 ( Donald Ervin Knuth ) 在 "The Art of Computer Programming" 寫道，1150年印度數學家研究箱子包裝物件長寬剛好為1和2的可行方法數目時，首先描述這個數列。斐波那契 Fibonacci (1175年 - 1250年) 在《計算之書》 "Liber Abaci" 中提出理想假設條件下兔子成長的問題，衍生費氏數列。

## Theorem (費氏數列公式解, Fibonacci Sequence)

令費氏數列定義為

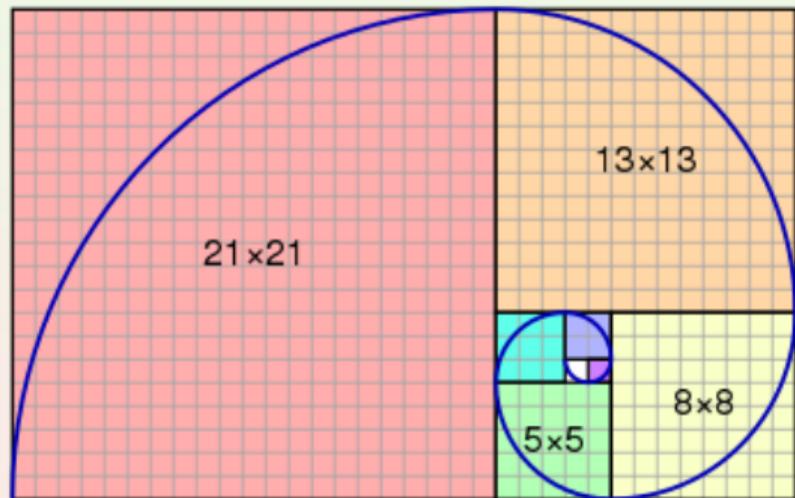
$$f_n = \begin{cases} 1 & , n = 0, 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & , n \geq 2 \end{cases}$$

則

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

# 大自然的規律

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

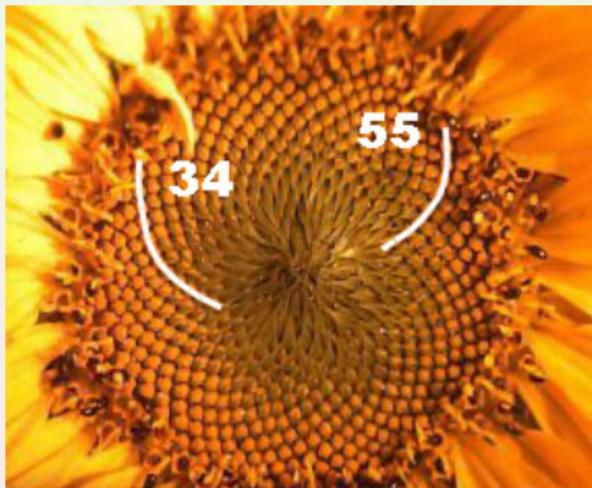
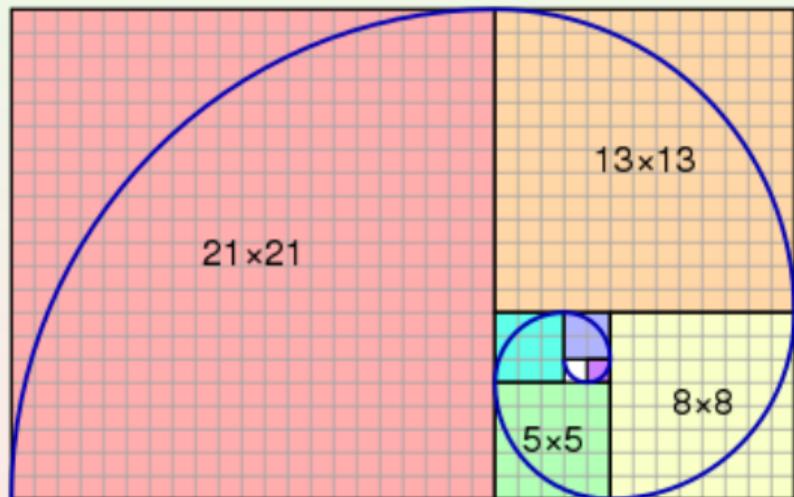
2x2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 大自然的規律

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

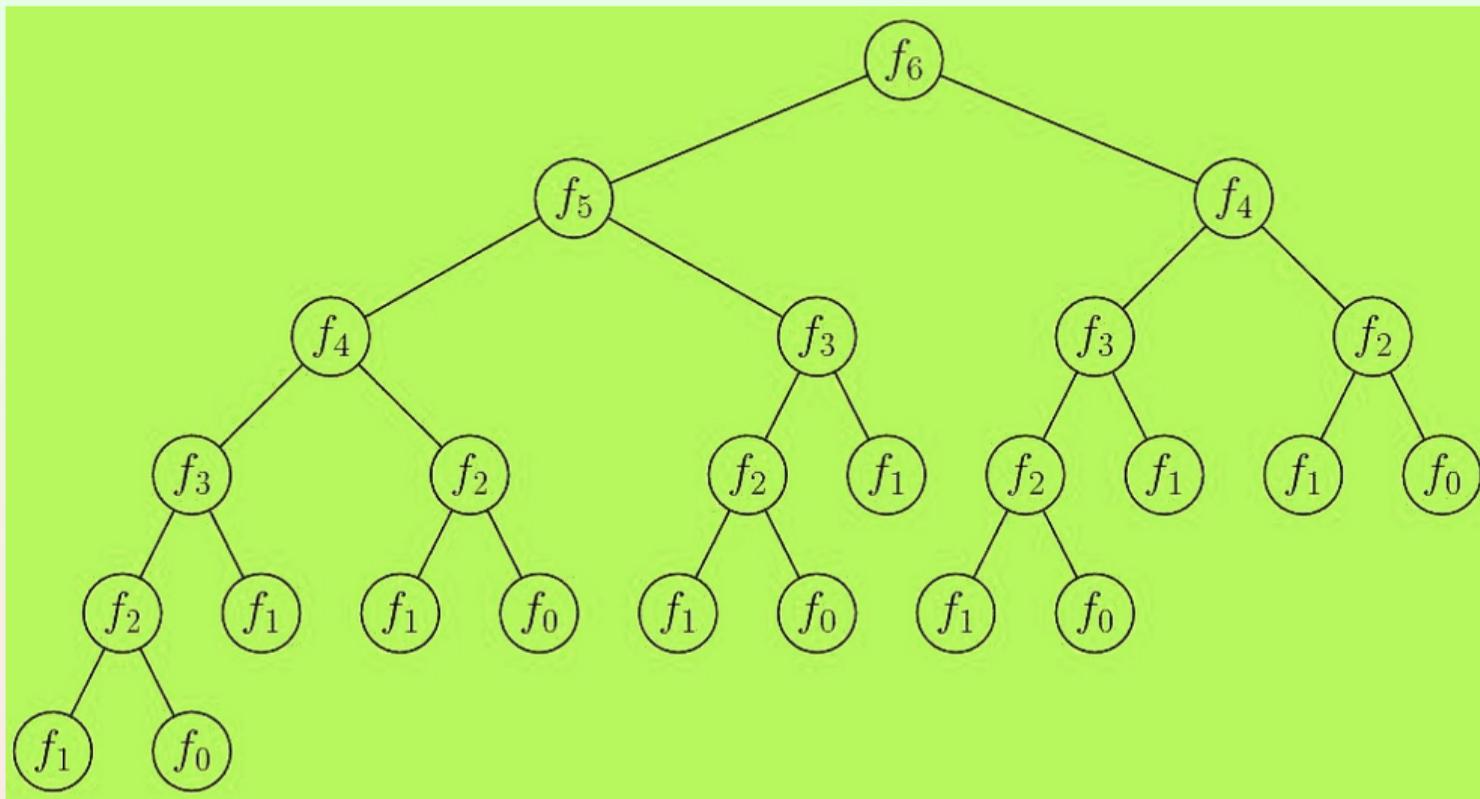
費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴& Memoization

2 x 2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術



圖：費氏數列項 $f_6$ 之計算樹，計算複雜度是指數時間。

# Memoization Recursion

- ▶ 費氏數列遞迴可改為迴圈寫法。

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴 & Memoization

2 × 2矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# Memoization Recursion

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴 & Memoization

2 × 2 矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

- ▶ 費氏數列遞迴可改為迴圈寫法。
- ▶ 或是保持遞迴，以陣列等容器儲存記憶計算值，還沒計算的再遞迴呼叫，此為Memoization Recursion。

# Memoization Recursion

- ▶ 費氏數列遞迴可改為迴圈寫法。
- ▶ 或是保持遞迴，以陣列等容器儲存記憶計算值，還沒計算的再遞迴呼叫，此為Memoization Recursion。
- ▶ 計算複雜度是線性時間。

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴& Memoization

2 × 2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# Memoization Recursion

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴 & Memoization

2 × 2矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

- ▶ 費氏數列遞迴可改為迴圈寫法。
- ▶ 或是保持遞迴，以陣列等容器儲存記憶計算值，還沒計算的再遞迴呼叫，此為Memoization Recursion。
- ▶ 計算複雜度是線性時間。
- ▶ 更快的的計算方式是直接用公式解，會用到浮點計算。不想用，就用 $2 \times 2$ 矩陣改寫。

# 2 × 2 矩陣 & 費氏數列

幾個解費氏數列的 C++ 程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴 & Memoization

2 × 2 矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的 C++ 技術

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

⇒

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 計算 $f_9$

$$\begin{bmatrix} f_9 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

2 × 2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 計算 $f_9$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_9 \\ f_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \right)^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

2 × 2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 計算 $f_9$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f_9 \\ f_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \right)^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴& Memoization

2 × 2 矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 計算 $f_9$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴& Memoization

2 × 2 矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_9 \\ f_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \right)^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# 快速計算矩陣冪次方 Matrix Power

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

令 $A$ 為一般 $m \times m$ 矩陣，矩陣冪次方 $A^n$ 可以下列MSBF演算法進行：(時間複雜度 $O(\log(n))$ )

```
1 Convert n to binary expression:\n2 d[L-1]d[L-2]...d[1]d[0];\n3 C = Identity_Matrix;\n4 for (int i = L-1; i >= 0; i--) {\n5     C = C*C;\n6     if (d[i]) C = C*A;\n7 }\n8 return C;
```

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

2 x 2矩陣&費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 計算 $A^{25}$

指數

$$n = 25 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = (11001)_2 = d[4]d[3]d[2]d[1]d[0]$$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴& Memoization

2 × 2 矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 計算 $A^{25}$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

指數

$$\begin{aligned}n &= 25 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = (11001)_2 = d[4]d[3]d[2]d[1]d[0] \\ &= (((1 \times 2 + 1) \times 2) \times 2) \times 2 + 1\end{aligned}$$

採用MSBF演算計算： $(d[3] = 1)$

$$A^{25} \rightarrow A^2 A$$

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解  
費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴 & Memoization

2 × 2矩陣 & 費氏數列

Matrix Power  
簡例

需要的C++技術

# 計算 $A^{25}$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

指數

$$\begin{aligned}n &= 25 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = (11001)_2 = d[4]d[3]d[2]d[1]d[0] \\ &= (((1 \times 2 + 1) \times 2) \times 2) \times 2 + 1\end{aligned}$$

採用MSBF演算計算： $(d[2] = 0)$

$$A^{25} \rightarrow (A^2 A)^2$$

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解

費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

2 × 2矩陣&費氏數列

Matrix Power

簡例

需要的C++技術

# 計算 $A^{25}$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

指數

$$\begin{aligned}n &= 25 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = (11001)_2 = d[4]d[3]d[2]d[1]d[0] \\ &= (((1 \times 2 + 1) \times 2) \times 2) \times 2 + 1\end{aligned}$$

採用MSBF演算計算： $(d[1] = 0)$

$$A^{25} \rightarrow ((A^2 A)^2)^2$$

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解

費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

$2 \times 2$ 矩陣&費氏數列

Matrix Power

簡例

需要的C++技術

# 計算 $A^{25}$

幾個解費氏數列的C++程式做法

anwendeng

指數

$$\begin{aligned}n &= 25 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = (11001)_2 = d[4]d[3]d[2]d[1]d[0] \\ &= (((1 \times 2 + 1) \times 2) \times 2) \times 2 + 1\end{aligned}$$

採用MSBF演算計算： $(d[0] = 1)$

$$A^{25} = (((A^2 A)^2)^2)^2 A$$

費氏數列遞迴關係

費氏數列公式解

費氏數列遞迴函數

費氏數列遞迴&Memoization

2 × 2矩陣&費氏數列

Matrix Power

簡例

需要的C++技術

# 可用的C++技術

- ▶ STL array class: `array<array<int, 2>, 2>` 表  $2 \times 2$  Matrix的型態，如果陣列大小未定，建議用STL vector，傳統C/C++的作法會用指標，指標不好 debug。
- ▶ operator overloading(運算子重載)作為矩陣乘法函數，乘法就用\*表示，簡捷一目了然，C++特有，C#跟進，Java不支援。
- ▶ STL bitset class:化為二進位的利器