離散型機率分配-3

李水彬Shuipin

2023/10/25

幾何分配

- 執行相同的白努力實驗直到成功事件出現，統計執行的次數，此次數為一隨機變數稱為幾何隨機變數。
- 如大年初一寺廟舉辦的擲筊比賽(聖筊為失敗)，擲出聖筊者可以繼續比賽。
- 假設 $X = x$，最後一次成功，前$x-1$次都失敗。機率分配為($q = 1 - p$)

$$f(x) = pq^{x-1}, x = 1, 2, \cdots$$

至少實驗一次，但無上限。

期望值與變異數

- $E(X) = 1/p$
- $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

範例

假設某張證照通過率為 $p = 0.1$, 請問

- 第11次取得證照的機率為何?

Ans: $f(11) = 0.1 \times 0.9^{10} = 0.0349$

- 3 次內取得證照的機率?

Ans:$f(1) + f(2) + f(3) = 0.1 \times 0.9^0 + 0.1 \times 0.9^1 + 0.1 \times 0.9^2 = 0.271$

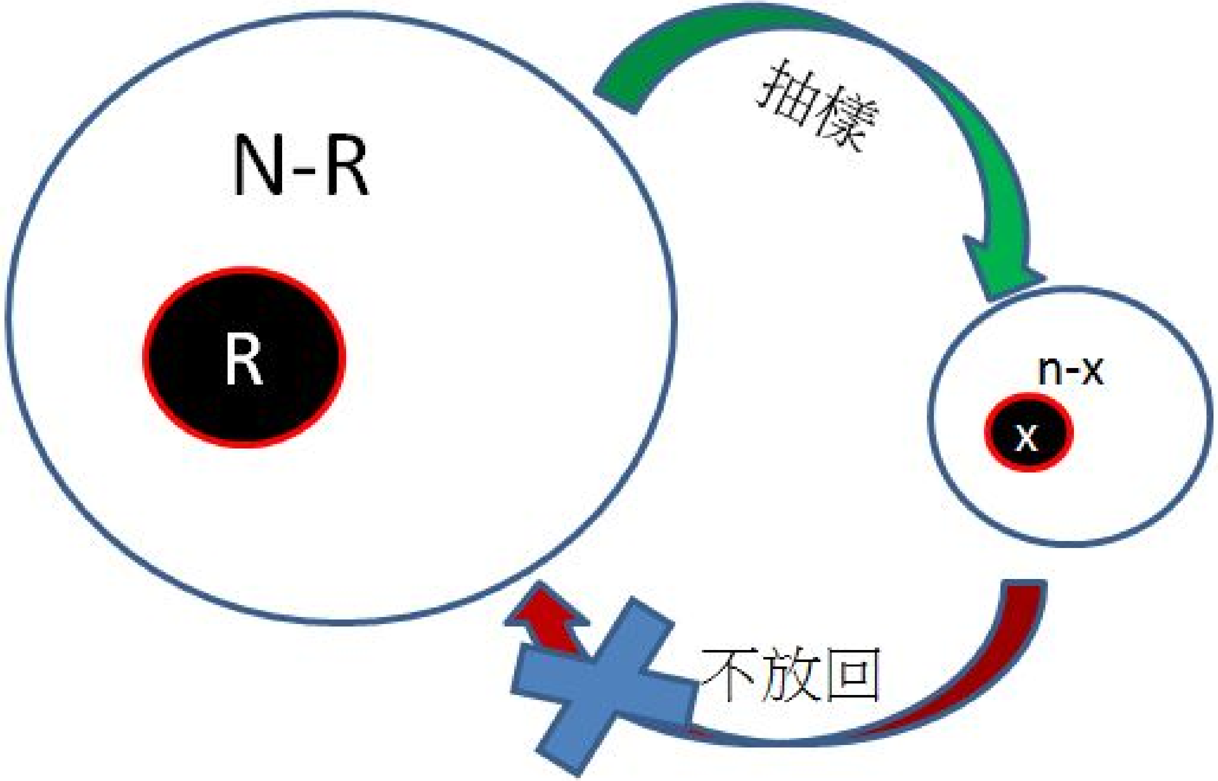
- 請問取得該證照的考照次數的期望值與變異數。

Ans:$E(X) = 1/0.1 = 10, Var(X) = 0.9/0.1^2 = 90$

超幾何分配

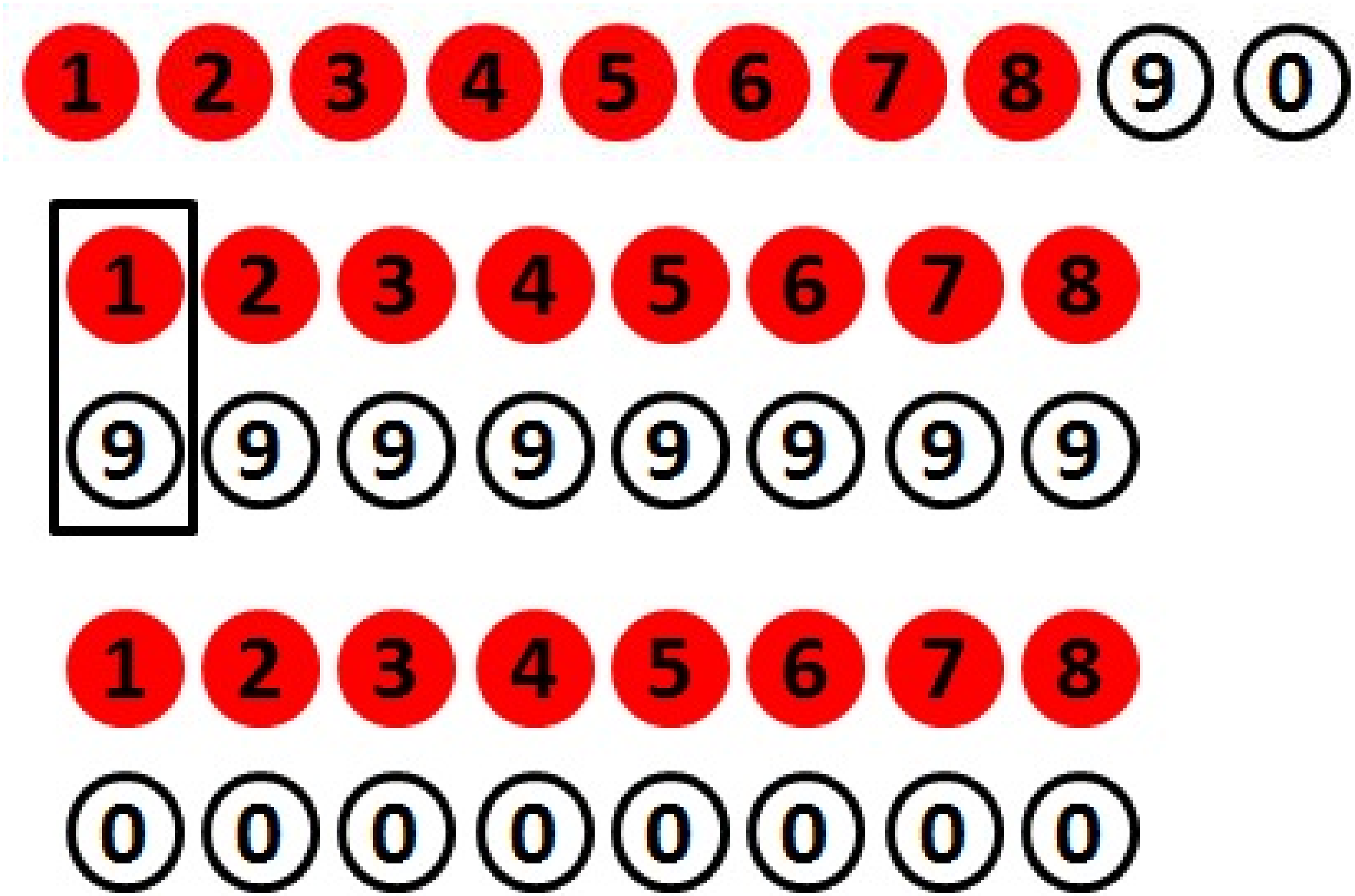
- 假設有限母體個數為 N，母體中的成員被分成兩類，
  - 第一類為成功有 R 個，
  - 第二類為失敗有$N-R$ 個。
- 今從母體抽出 個成員(**不放回**)，紀錄成功出現的次數，此稱為超幾何隨機實驗 (hypergeometric distribution)。
- 令 X 代表成功類別被抽中的個數，我們稱 X 為超幾何隨機變數。

超幾何隨機實驗



範例

- 假設 10 球當中有 8 紅球(R), 2個白球(W)。請問任意抽出2球，恰有 1 個紅球的組合數?



範例

- 請問恰有1個紅球的機率?

機率分配函數

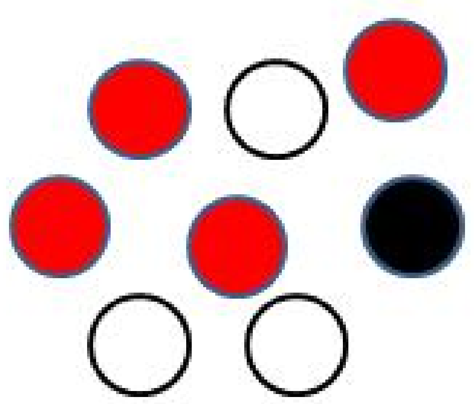
- 從N中抽n個，這個實驗樣本空間個數=C_n^N。
- 例如，從 5 顆球中抽兩個，共有 $C_2^5 = 10$ 種。
- 在n中有x個成功，這x個必從母體中R個成功中抽出，共有C_x^R種。
- 另外會有$n-x$個失敗，這$n-x$個必從母體中$N-R$個失敗中抽出，共有C_{n-x}^{N-R}種。
- 讓事件 E_x 代表有x個成功，共有 $C_x^R \times C_{n-x}^{N-R}$ 種。
- 古典機率得

$$f(x) = \frac{C_x^R \times C_{n-x}^{N-R}}{C_n^N}$$

其中 $x = \max(0, n-(N-R)), \cdots, \min(n, R)$。

解釋

隨機變數 X 成功的次數不可能超過抽樣個數 n , 也不可能超過母體中成功的個數 R, 所以, x 的上界為 $\min(n, R)$。隨機變數 X 成功的次數不可能低於0, 也不低於 $n-(N-R)$ 其意為當抽完所有失敗者, 剩下被抽中的都屬成功者。



如圖，抽5球，最多4=$min(n, R)$ 顆紅球，最少1=$max(0, n-(N-R))$ $= max(0, 5-4)$ 顆紅球。$N=8, R=4, N-R=4, n=5$。

範例

某公司進貨一批 20 個, 假設其中有 3 個不良品。今作進貨檢驗, 抽驗5個貨品, 令 X 代表不良品的個數。請問: ($N=20, R=3, N-R=17, n=5$) + 隨機變數 X 的機率分配?

$$f(x)=\frac{C_x^3 C_{5-x}^{17}}{C_5^{20}}, x=0,1,2,3$$

- 請問沒有檢驗出不良品的機率為何?

$$f(0)=\frac{C_0^3 C_5^{17}}{C_5^{20}}=\frac{1\times 6188}{1.5504\times 10^4}=0.3991228$$

範例

- 超過1不良品就退貨, 請問退貨的機率?
  進貨機率

$$f(0) + f(1) = 0.8596491$$

$$f(1) = \frac{C_1^3 C_4^{17}}{C_5^{20}} = \frac{3 \times 2380}{1.5504 \times 10^4} = 0.4605263$$

範例

假設本班有男生30人，女生20人，今隨機抽取5位同學作調查，令 X 代表樣本中的男生人數，請問

- 沒有抽中男生的機率?

$$f(0) = \frac{C_0^{30} C_5^{20}}{C_5^{50}} = \frac{1 \times 1.5504 \times 10^4}{2.11876 \times 10^6} = 0.0073175$$

- 沒有抽中女生的機率?

$$f(0) = \frac{C_5^{30} C_0^{20}}{C_5^{50}} = \frac{1.42506 \times 10^5 \times 1}{2.11876 \times 10^6} = 0.0672592$$

期望值與變異數

已知隨機變數 $X \sim H(N, R, n)$, 則

- $E(X) = n \times \frac{R}{N}$
- $Var(X) = n \times \frac{R}{N} \times \frac{N-R}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$
- 其中 $\frac{R}{N}$ 為母體中成功的比例, $\frac{N-R}{N}$ 為母體中失敗的比例,
- $\frac{N-n}{N-1}$ 為有限母體的修正因子。

範例

- 假設本班有男生30人，女生20人，今隨機抽取5位同學作調查，令 X 代表樣本中的男生人數，請問 X 屬何種分配，併求算 X 的期望值與變異數。
- 某公司進貨一批 20 個, 假設其中有 3 個不良品。今作進貨檢驗, 抽驗5個貨品, 令 X 代表不良品的個數。請問X 的期望值與變異數?

近似分配

當 $N \gg n$ 時, $\frac{N-R}{N} \approx 1$, 超幾何隨機變數的期望值與變異數近似二項分配隨機變數。

使用二項分配的近似超幾何分配的步驟:

- 判斷 $\frac{n}{N} \leq 0.1$ 是否成立? 當這個條件成立後方可使用近似解。
- 令 $p = \frac{R}{N}$, 則 $H(N, R, n) \approx bin(n, p)$。
- $$f(x) = \frac{C_x^R C_{n-x}^{N-R}}{C_n^N} \approx C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$$

比較(放回與不放回)

- 假設有一批貨300元件，有2%不良品。今以**不放回**的方式隨機抽取一組樣本共40件樣品。令X 代表此組樣本中不良品數目，請問 屬何種分配，併求算X 的期望值與變異數。(超幾何分配)
- 同上題，若改用**放回**方式檢驗，請問X 屬何種分配，併求算 的X期望值與變異數。(二項分配)
- 當 N 很大, n 很小，放回與否差異不大。

範例(使用二項分配近似)

假設本班有男生30人，女生20人，今隨機抽取5位同學作調查，令 X 代表樣本中的男生人數，請問 ($p = \frac{30}{50} = 0.6$男生的比例)

- 沒有抽中男生的機率?

$$f(0) = \frac{C_0^{30} C_5^{20}}{C_5^{50}} = C_0^5 0.6^0 0.4^5 = 0.01024$$

- 沒有抽中女生的機率?(5個男生)

$$f(5) = \frac{C_5^{30} C_0^{20}}{C_5^{50}} == C_5^5 0.6^5 0.4^0 = 0.07776$$

範例(直述式題目)

假設一離散型隨機變數X 具有參數
$N=100, R=30, n=3$的超幾何分配。請問，

- $P(X=1)=0.784-0.343=0.441$
- $P(X\leq 2)=F(2)=0.973$
- $E(X)=n\frac{R}{N}=3\times\frac{30}{100}=0.9$
- $Var(X)=n\frac{R}{N}\frac{N-R}{N}\frac{N-n}{N-1}$

(提示:$n/N=0.03\leq 0.1$，可以使用二項分配近似)
令 $n=3, p=\frac{R}{N}=0.3$

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.729	0.512	***0.343***	0.216	0.125
1	0.972	0.896	***0.784***	0.648	0.500
2	0.999	0.992	***0.973***	0.936	0.875
3	1.000	1.000	***1.000***	1.000	1.000

$$Var(x)=3\times\frac{30}{100}\frac{100-30}{100}\frac{100-3}{100-1}=3\times 0.3\times 0.7\times 97/99=0.6172727$$

範例(應用題)

某公司進貨 $N = 10,000$, 假設這批貨中有 100 不良品, 隨機抽檢 $n = 20$ 個, 令 X 檢驗出的不良品個數, 請問

- X 的機率分配?
- X 的期望值與變異數?
- 有一個不良品的機率?

卜瓦松分配 (Poisson distribution)

卜瓦松分配 (Poisson distribution)

- 稀有事件在一個固定範圍、或相同間隔時間出現次數的機率分配。
- 例如，產品上的缺點數，LCD 面板上的亮點數，十字路口每天車禍次數等。
- 一片 12 吋晶圓片上的雜點數目。
- 桃園縣一天中發生的車禍次數。
- 一片汽車烤漆的氣泡數目。
- 每小時的客服抱怨次數。

卜瓦松分配 (Poisson distribution)

三個基本特性:

- 在很短時間內，某事件發生的機率與時間的長度或是區域大小成正比。
- 在很極短的時間或極小的區域內, 某事件發生兩次的機率幾乎為零。
- 任兩個不重疊的時間或區域, 某事件發生的次數彼此間相互獨立。

機率分配函數

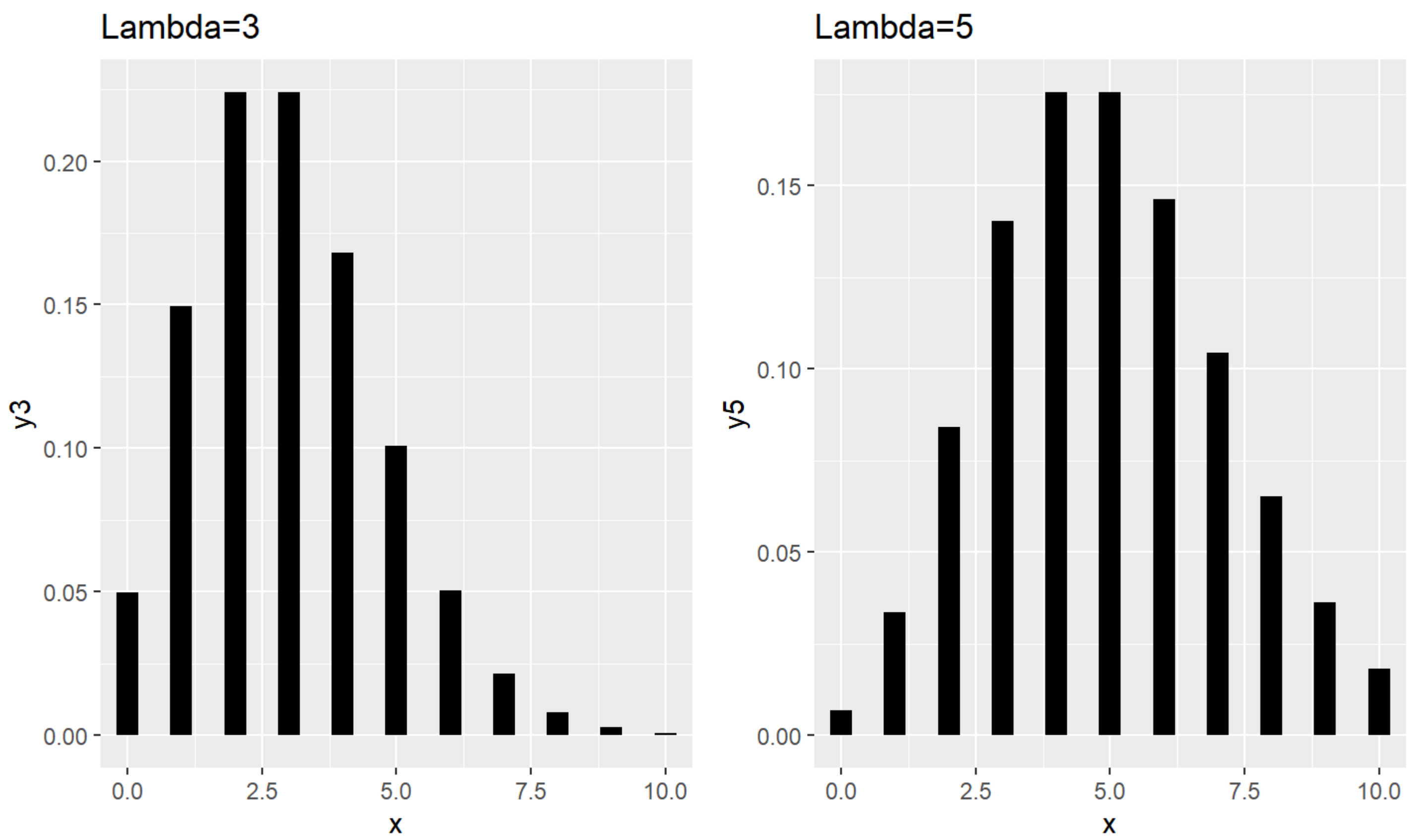
假設隨機變數 X 的機率分配函數為

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, 2, \cdots$$

我們稱 X 為具有參數 λ 的卜瓦松隨機變數。

- 期望值 $\mu = E(X) = \lambda$
- 變異數 $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$
- 標準差 $\sigma = \sqrt{\lambda}$

機率分配圖



Lambda=3
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y3
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x
Lambda=5
0.15
0.10
0.05
0.00
y5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x

練習

- 假設大華公司有一批產品 100件 欲交貨給顧客，而其交貨合約書上規定，若產品中 有超過 1 件不良品時需退貨。

- 若該公司產品之不良率為 0.02，請問此批產品退貨的機率為何？

	1.7	1.8	1.9	2	2.1
0	0.1827	0.1653	0.1496	***0.1353***	0.1225
1	0.3106	0.2975	0.2842	***0.2707***	0.2572
2	0.2640	0.2678	0.2700	***0.2707***	0.2700
3	0.1496	0.1607	0.1710	***0.1804***	0.1890
4	0.0636	0.0723	0.0812	***0.0902***	0.0992
5	0.0216	0.0260	0.0309	***0.0361***	0.0417

$$\lambda = n \times p = 100 \times 0.02 = 2$$

進貨機率=

$$P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = 0.1353 + 0.2707 = 0.406$$

練習

假設主機板上焊接缺點數為一個卜瓦松隨機變數, 依過去經驗平均每一片主機板有0.1個缺點, 請問:

- 檢驗 20 塊主機板沒有發現缺點的機率? ($\lambda = 20 \times 0.1 = 2$)
- 主機板上只要有2個缺點就是報廢品, 檢驗 5 塊主機板都沒有報廢品的機率? ($\lambda = 5 \times 0.1 = 0.5$)