

# Chapter 10

## 假設檢定

### 學習重點

- 何謂虛無假設？
- 無法拒絕虛無假設的意義。
- 分辨型 I 和型 II 錯誤。
- 能夠解釋檢定的結果。

愛因斯坦：一個從未犯錯的人是因為他不曾嘗試新鮮事物。

Anyone who has never made a mistake has never tried anything new.

### 10.1 假設檢定的基本概念

統計假設檢定 (hypothesis testing) 是研究者將母體參數空間劃分成兩類，並陳述他認為真正的參數是屬於這兩類其中一，做出假設性的陳述；利用隨機抽樣方式收集本資訊進行驗證其陳述是否為真的一個過程，因為其判定是基於樣本資訊，故稱此過程為統計檢定。圖10.1概略描述這樣一個過程，這裡強調這是一個循環過程 (假設 → 收集資料 → 判斷)。

一般人常常作假設性的陳述，只是往往這些陳述缺乏可供信賴的資訊，以論證其是否為真。但若要累積知識，改善目前狀況則需要統計科學加以證實。現今科技發達，一部分的貢獻來自於統計學的發展，我們看看一些例子：

- 一些生產因素可能隨時間推移而改變，例如，原物料品質，機器老化等。品管人員擔心某一台機器，或某一條生產線的生產狀況可能會偶而發生不穩定的情形，所以，定期檢測產品的品質特性變數 (quality characteristic variable) 以監控 (monitor) 製程的穩定性。(參數空間為穩定和不穩定，或品質特性變數的範圍)



圖 10.1: 統計假設檢定是一個循環的過程。

- 爲了確保供應商的元件品質，品管部門訂定抽樣計畫用以判定供應商所供應的元件批量是否可以允收。(參數空間爲合格和不合格,  $0 \leq p \leq 1$ )
- 藥廠開發新的降血壓藥品，他們相信這新的藥比舊藥更爲有效，在時效上與降幅皆是如此，然而這需要一些臨床數據支持，才能建議醫師開立新藥取代舊藥，改善病人的生活品質。
- 小學生中，老師普遍認爲男學生比較好動，在課堂上無法專心聽講，是以有人認爲男學生的學習成效較女學生爲低。但事實是否如此，果真男學生比較好動，與學習成效是否有關呢？這並不容易得到一個普遍性的結論。
- 星期五接近週末，公司員工是否受到預期放假的影響，使得產量低於其它時間呢？這可以分析生產數據得到一些佐證。
- 某公司爲了增加訂單，對外宣稱其工廠生產的成品良率可達 95%，高於一般同業水準。

### 10.1.1 兩個假設

以上這些例子，陳述了可能的事實中的某一方向。公司良率有可能是不到 95%，當然也有可能是。所謂太極生兩儀，天下本爲渾沌，一個假設性的陳述雖僅講述一面『比較好』，另一面卻同時存在。假設檢定必須在兩者選一。兩儀爲陰陽二爻，假設也有兩個，分別爲**虛無假設** (null hypothesis,  $H_0$ )和**對立假設** (alternative hypothesis,  $H_1$ )。何者爲虛無，何者爲對立，並非全然確定，這關乎**研究者的立場與目的**。老子道德經『有無相生，難易相成，長短相形，高下相傾，聲音相和，前後相隨』。這反應一種觀點的陳述，必有相反的面向存在的可能，統計假設是對母體參數的一種假說，然而其對應的假說則是另一種可能爲真的事實。

基本上，我們想要證實爲真的那個面向，那個假設稱爲對立假設，我們想要否定的，稱爲虛無假設。所以，角度不同，立場不同，觀點不同，對同樣的問題在虛無與對立假設的設定上就有可能不同。

#### 例 10.1.

假設某手機業者宣稱其手機之平均待機時間爲 96 小時，請問消費者欲檢定此手機業者之宣稱是否爲真，請問該如何假設？令  $\mu$  爲此業者手機的平均待機時間，這兩個假設可以是

$$(a) \begin{cases} \text{虛無假設} & H_0 : \mu \geq 96 \\ \text{對立假設} & H_1 : \mu < 96 \end{cases}$$

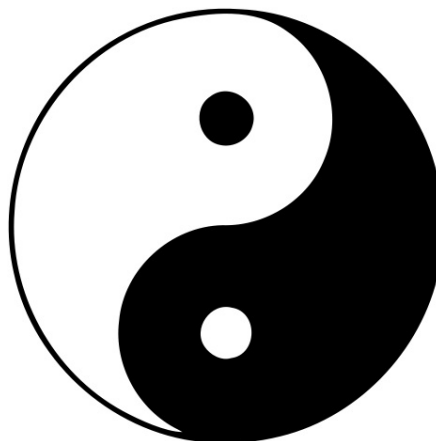


圖 10.2: 一個陳述表現出兩種假設。

也可以是

$$(b) \begin{cases} \text{虛無假設} & H_0 : \mu \leq 96 \\ \text{對立假設} & H_1 : \mu > 96 \end{cases}$$

但就消費者的角度，必非想要證實業者的宣稱，通常是擔心或認為業者誇大手機的待機時間，因此，以 (a) 的假設比較合適。

■

根據立場、角度，以及問題陳述本身，這裡對於假設設立的原則，提出以下幾點：

1. 意欲否定的假設為虛無假設。
2. 意欲證實為真的假設為對立假設。一般而言，我們總是希望發現差異的存在，或證實經過一些努力後情況和過去不同。
3. 以問題陳述的反面主張為虛無假設。反面指保持原狀沒有改變之意，無差別和沒有差異，正面表是進步提升，有所改變之意。例如，新藥與舊藥的療效沒有差別，現在的製程狀態和過去一樣。
4. 錯誤拒絕某一假設後果較為嚴重，此一假設為虛無假設。
5. 他人的主張為虛無假設。

前兩點是基本原則，後三點是衍生。關於第三點，例如研究者認為女學生的學習成效比較好，這陳述的『反面主張』就是沒有比較好。所以，在這個問題上，研究者想要證實『女學生的學習成效比較好』，等同於想要否定『沒有比較好』，這個反面主張就是他想要否定的。故虛無假設為『沒有比較好』。

關於第四點，在一個民主法治國家，強調無罪推定。一個嫌疑犯在被判定有罪之前，都被認為是無罪的，有罪是需要證實的。法官面對嫌疑犯，心中設想他在案中的角色有兩個可能（假設），一為有罪這是對立假設，另一為無罪這是虛無假設。在講人權的國度裡，將無罪的人判成有罪是非常嚴重的錯誤（你想要被誤會嗎？誤判發生在任何身上，都很難被接受的）。但是，在極權獨裁國家，所謂寧可錯殺一百也不能放過一人的思維下，虛無假設就是有罪，對立假設才是無罪。

關於第五點，他人就是有別於己。研究者斷無利用自己資源去證實別人陳述為真的道理。對於他人，我們只有想要去否定他。意欲否定者，就是虛無假設。例如，政府去檢驗工廠排放廢水是否合乎標準？工廠當然主張其廢水合乎標準，政府斷無為其背書的道理，政府檢驗的目的就是抓出不合格者。消基會抽驗市售產品也是要找出廠商的配方是否合乎規定，在未檢驗前，廠商當然宣稱其產品是符合政府規定的。

### 10.1.2 兩種錯誤決策

統計假設檢定，最終必須對於假設有所決策判斷，否則僅是一種空想和猜想，無法形成知識累積。假設有兩個，而決策亦有兩種：

**不拒絕  $H_0$ ：** 另說無法證實  $H_1$  為真，原有的虛無假設需要修正。就資料的顯示，無充分的證據與信心認為虛無假設是不對的 (do not reject  $H_0$ )。統計檢定是企圖用樣本統計量拒絕  $H_0$  的假設，然而當證據無法證實  $H_0$  為假時，我們通常說無法拒絕  $H_0$ 。然而，無法拒絕  $H_0$  並不是代表  $H_0$  為真，只是就目前資料而言，我們沒有充分的證據他人有關  $H_0$  的陳述。

**拒絕  $H_0$ ：** 另說證實  $H_1$  為真，也就是研究者證實自己想要的結果。就資料顯示，已經有充分的證據與信心認為虛無假設是不對的 (reject  $H_0$ )。

但是，固然有些樣本作為佐證，但真實又如何呢？很多情況這只有上帝或老天爺可知，而有些案件或決策則於一段時間之後證實是正確或錯誤的。如何統計檢定又如何進行上述決策判斷呢？

#### 定義 10.1.

**檢定統計量**是一個做為判定是否拒絕  $H_0$  的統計量。統計量為樣本  $X_1, \dots, X_n$  的函數，此函數值做為檢定之依據故稱為檢定統計量。

■

#### 定義 10.2.

**拒絕域**是一個集合 (範圍)  $C$ ，若檢定統計量落在  $C$  則拒絕虛無假設，反之，則無法拒絕 (接受) 虛無假設。

■

統計檢定的決策方式，首先根據假設檢定的形式決定合適的檢定統計量函式，並檢定統計量設定拒絕域，再者將資料  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  代入統計量函式計算其數值，以其值是否落在拒絕域內作為判定的依據。

#### 例 10.2.

擲一個的銅板 4 次，請問如何判定這個骰子是否公平？這個問題是針對銅板投擲後出現正面的情形，故令銅板實驗的參數為出現正面的機率，以符號  $p$  表示，其參數空間為  $0 \leq p \leq 1$ ，當  $p = 0.5$  時，認定這是一個公平的銅板。

**解** . 1. 兩個假設

$$\begin{cases} \text{虛無假設} & H_0 : \text{銅板是公平的} \\ \text{對立假設} & H_1 : \text{銅板不是公平的} \end{cases}$$

亦可寫成

$$\begin{cases} \text{虛無假設} & H_0 : p = 0.5 \\ \text{對立假設} & H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$$

2. 令  $X_i$  代表第  $i$  次投擲的結果，正面為 1，反面為 0。此一實驗的樣本空間

$$\Omega = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 1111\}$$

3. 令正面出現的次數

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

為檢定統計量。

4. 拒絕域

$$C_1 = \{0, 1, 3, 4\}$$

或

$$C_2 = \{0, 4\}$$

有何差異？

**例 10.3.** (接續例 10.1)

我們令拒絕域  $C_1 = \{\bar{X} < 95\}$ ，即當樣本平均值 (檢定統計量) 小於 95 就拒絕  $H_0$ 。今  $\bar{X} = 94.7$  也就否定了業者的宣稱，表示他的手機平均待機時間並沒有達到 96。但若拒絕域改為  $C_2 = \{\bar{X} < 94\}$ ，則無法拒絕  $H_0$ 。

例 10.2 和例 10.3 說明如何決定拒絕域影響假設檢定的結論，而我們又該如何取捨，會造成什麼結果呢？不管是選擇  $C_1$  或  $C_2$  都有可能發生錯誤的，連續投一個公平的銅板出現四次同面的機率為 0.125，但是一個不是公平的銅板也有可能出現正面與反面次數相同的情形。所以，兩種假設和兩種決策，組合四種可能的結果 (兩儀生四象)。



表 10.1: 統計決策的結果

決策	真實情況	
	$H_0$	$H_1$
拒絕 $H_0$	型 I 錯誤	正確
不拒絕 $H_0$	正確	型 II 錯誤

上表中有兩個正確判定, 不用特別說明; 但也有兩種錯誤, 分述如下:

**型 I 錯誤:** 當  $H_0$  為真時, 我們拒絕  $H_0$  之宣稱, 此時發生的錯誤, 稱之為型 I 錯誤。通常用希臘字母  $\alpha$  表示型 I 錯誤的機率, 稱之為顯著水準。品管檢驗稱為型 I 錯誤的機率為**生產者風險**。例如, 供應商的貨品實際上是合格的, 但檢驗時因為抽到比較多的不良品造成誤判, 認為這批貨不合格而退貨, 造成供應商的損失, 故稱為生產者風險。定義如下:

$$\alpha = P(\text{拒絕 } H_0 \mid H_0 \text{ 為真}) \quad (10.1)$$

**型 II 錯誤:** 當  $H_1$  為真時, 我們拒絕  $H_1$  之宣稱, 此時發生的錯誤, 稱為型 II 錯誤。通常用希臘字母  $\beta$  表示型 II 錯誤的機率。品管檢驗稱為型 II 錯誤的機率為**消費者風險**。例如, 供應商的貨品實際上是不合格的, 但檢驗時因為抽到比較少的不良品造成誤判, 認為這批貨合格而進貨, 造成消費者的損失, 故稱為消費者風險。定義如下:

$$\beta = P(\text{不拒絕 } H_0 \mid H_1 \text{ 為真}) \quad (10.2)$$

#### 例 10.4.

已知常態母體之變異數為 16, 今對此母體平均數作以下之假設

$$H_0: \mu = 5 \text{ vs. } H_1: \mu \neq 5$$

並決定其拒絕域為

$$C = \{\bar{X} > 5.8 \text{ 或 } \bar{X} < 4.2\}$$

請問以一樣本個數為 25 之樣本平均數來檢定母體平均數, 求型 I 錯誤之機率  $\alpha$  為何?

#### 解 .

樣本平均數的抽樣分配為

$$\bar{X} \sim N\left(5, \frac{4^2}{25}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} > 5.8 \text{ 或 } \bar{X} < 4.2 \mid H_0) \\ &= 1 - P(4.8 \leq \bar{X} \leq 5.8 \mid H_0) \\ &= 1 - P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 2(1 - \Phi(1)) \\ &= 2(1 - 0.8417) = 2 \times 0.1587 = 0.3174 \end{aligned}$$

標準分數的公式：

$$z = \frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma}$$

左側 4.2 的標準分數

$$z_L = \frac{\sqrt{25}(4.2 - 5)}{4} = -1$$

右側 5.8 的標準分數

$$z_U = \frac{\sqrt{25}(5.8 - 5)}{4} = 1$$

**例 10.5.** 接續例 10.7

若  $\mu = 6.6$  時，求型 II 錯誤之機率  $\beta$  為何？

**解**

樣本平均數的抽樣分配為

$$\bar{X} \sim N\left(6.6, \frac{4^2}{25}\right)$$

$$\begin{aligned} \beta &= P(4.2 \leq \bar{X} \leq 5.8 \mid \mu = 6.6) \\ &= P(-3 \leq Z \leq -1) \\ &= \Phi(-1) - \Phi(-3) = \Phi(3) - \Phi(1) \\ &= 0.9985 - 0.8417 = 0.1568 \end{aligned}$$

左側 4.2 的標準分數

$$z_L = \frac{\sqrt{25}(4.2 - 6.6)}{4} = -3$$

右側 5.8 的標準分數

$$z_U = \frac{\sqrt{25}(5.8 - 6.6)}{4} = -1$$

**例 10.6.** 接續例 10.7

若拒絕域改為

$$C = \{\bar{X} > 6.6 \text{ 或 } \bar{X} < 3.4\}$$

求型 I 錯誤之機率  $\alpha$  為何？

解 .

樣本平均數的抽樣分配為

$$\bar{X} \sim N\left(5, \frac{4^2}{25}\right)$$

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\bar{X} > 6.6 \text{ 或 } \bar{X} < 3.4 \mid H_0) \\ &= 1 - P(3.4 \leq \bar{X} \leq 6.6 \mid H_0) \\ &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 2(1 - \Phi(2)) \\ &= 2(1 - 0.9772) = 2 \times 0.0228 = 0.0456\end{aligned}$$

左側 3.4 的標準分數

$$z_L = \frac{\sqrt{25}(3.4 - 5)}{4} = -2$$

右側 6.6 的標準分數

$$z_U = \frac{\sqrt{25}(6.6 - 5)}{4} = 2$$

而型 II 錯誤之機率  $\beta$  為何?

解 .

樣本平均數的抽樣分配為

$$\bar{X} \sim N\left(6.6, \frac{4^2}{25}\right)$$

$$\begin{aligned}\beta &= P(3.4 \leq \bar{X} \leq 6.6 \mid \mu = 6.6) \\ &= P(-4 \leq Z \leq 0) \\ &= \Phi(0) - \Phi(-4) = \Phi(4) - \Phi(0) \\ &= 1 - 0.5 = 0.5\end{aligned}$$

左側 3.4 的標準分數

$$z_L = \frac{\sqrt{25}(3.4 - 6.6)}{4} = -4$$

右側 6.6 的標準分數

$$z_U = \frac{\sqrt{25}(6.6 - 6.6)}{4} = 0$$

■

在樣本大小固定下，以上三個例子我們看出無法同時降低型 I 和型 II 錯誤的機率，在相同的檢定統計量 ( $\bar{X}$ )，改變拒絕域會減少或放大型 I 錯誤的機率，然而 II 錯誤的機率也會放大或縮小。以下是關於型 I 錯誤的機率與型 II 錯誤的機率的一些結論。

1. 決策犯錯的無可避免的，有正確判斷的可能，但也有犯錯的機會。當然，決策者於當時都相信他的決策是正確的。



2. 我們希望犯錯的機率愈小愈好, 即  $\alpha$  與  $\beta$  愈接近 0 愈好, 但這需要成本, 統計上的成本就是樣本大小, 樣本愈大成本愈高, 推論更為精確而使  $\alpha$  與  $\beta$  變小。
3. 然而在樣本大小 ( $n$ ) 給定的情況下,  $\alpha$  愈小則  $\beta$  愈大, 反之亦然, 兩者不可兼得。
4. 在假設設立原則, 錯誤拒絕虛無假設的後果較為嚴重, 是以執行統計檢定必須控制型 I 錯誤的機率。通常的做法為設定  $\alpha$  後, 然後再決定拒絕域。稱  $\alpha$  為一個統計檢定顯著水準。

一個好的檢定統計量能在  $H_0$  為錯誤時, 拒絕  $H_0$ , 達成研究者的目的。一個檢定統計量的檢定力為正確拒絕  $H_0$  的能力, 在  $H_1$  為真的條件下, 檢定統計量證實其為真的能力。在固定  $\alpha$  下, 檢定力為判定檢定統計量良窳的指標。

**定義 10.3.** 統計量的檢定力的定義:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= 1 - P(\text{不拒絕 } H_0 \mid H_1 \text{ 為真}) \\ &= P(\text{拒絕 } H_0 \mid H_1 \text{ 為真}) \end{aligned} \quad (10.3)$$

■

假設兩個檢定方法  $C_1$  和  $C_2$  有相同的型 I 錯誤的機率, 若  $C_1$  的檢定力  $\beta_1$  大於  $C_2$  的檢定力  $\beta_2$ , 則檢定方法  $C_1$  較優。

**例 10.7.**

接續例 10.2, 我們以試驗排列情形定義以下兩個拒絕域

$$C_1 = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1111\}$$

和

$$C_2 = \{0000, 1000, 0001, 1110, 0111, 1111\}$$

它們型 I 錯誤的機率皆為  $3/8$ , 假設  $p = 0.6$ , 請問兩個檢定方法的檢定力。  
說明:(課堂講解)

■

以下我們開始學習如何有一個文字語言表達, 轉換成一個統計檢定命題。其實不難, 僅要知道如何在以下三種檢定類型選擇其一。假設檢定的類型分成單尾和雙尾檢定, 前者又分成左尾與右尾, 這是根據對立假設或對應的拒絕域的型態來命名的, 或是根據研究者的立場來命名的, 例如:

1. 右尾  $H_1: \mu > 60$
2. 左尾  $H_1: \mu < 60$
3. 雙尾檢定  $H_1: \mu \neq 50$

前兩者稱為單尾檢定 (one-sided test), 以左尾檢定為例, 當研究者欲證實抽菸男性平均壽命於 60, 虛無假設  $H_0: \mu \geq 60$ 。樣本平均值是用來判定何者為真的重要依據, 當樣本平均值愈小, 愈傾向研究者的想法可能為真, 相反的, 當樣本平均值愈大, 顯示愈無法支持傾向研究者的假設。我們將個假設與拒絕域的關係列於表 10.2, 對立假設與拒絕域有同向, 例如拒絕域的設定為  $C = \{\bar{X} \leq c\}$  為左尾與對立假設的小於不等式“ $<$ ”同向。

注意: 拒絕域的不等式設立方向與對立假設相同。

表 10.2: 兩個假設, 拒絕域, 顯著水準的關係表

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$ 的符號	=	$\geq$	$\leq$
對立假設 $H_1$ 的符號	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	在左右兩尾	在左尾	在右尾
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

統計假設檢定的程序與第 9 章信賴區間類似, 都是基於點估計的方法與其抽樣分配, 分成以下四個步驟:

1. 決定合適點估計統計量
2. 推導檢定統計量在  $H_0$  為真下的抽樣分配
3. 決定拒絕域型態: 以左尾檢定為例, 配合對立假設拒絕域的型態為

$$C = \{\bar{X} \leq c\}$$

4. 計算  $c$  值。

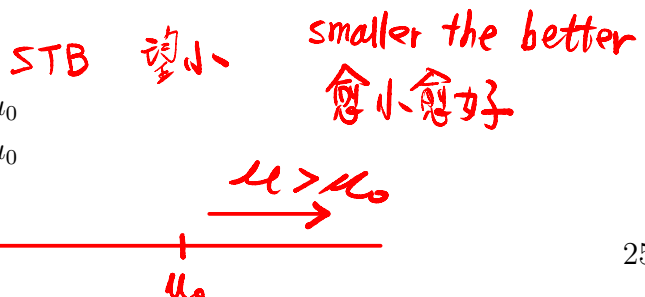
“=” 一定放在  $H_0$ 。

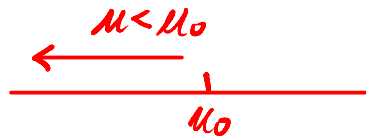
## 10.2 母體平均數的假設檢定

首先, 我們先介紹母體平均數檢定的三種類型: 給定  $\mu_0$  為參考點

1. 單尾檢定 (one-sided test)

- 右尾 (right-tailed)  $\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$

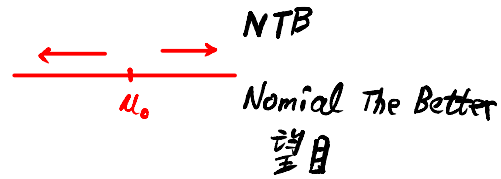




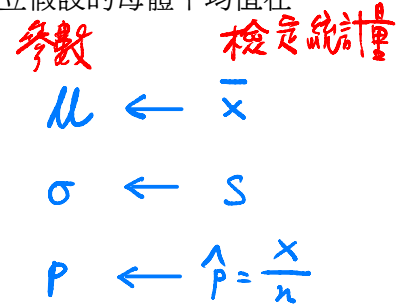
- 左尾 (left-tailed)  $\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$

LTB larger the better 望大

- 2. 雙尾檢定 (two-sided test)  $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$



上述都以對立假設作為檢定類型的命名, 左尾檢定是指對立假設的母體平均值在參考點  $\mu_0$  的左側, 右尾檢定是指對立假設的母體平均值在參考點  $\mu_0$  的右側, 雙尾檢定是指對立假設的母體平均值在參考點  $\mu_0$  的兩側。



### 10.2.1 常態母體, 變異數已知

1. 決定合適點估計統計量:  $\bar{X}$
2. 推導檢定統計量  $\bar{X}$  在  $H_0$  為真下的的抽樣分配:  $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
3. 決定拒絕域型態: 以左尾檢定為例, 配合對立假設拒絕域的型態為

$$C = \{\bar{X} \leq c\}$$

$\bar{x}$  愈小愈傾向拒絕  $H_0$ 。

4. 計算  $c$  值。  
因為

$$\alpha = P(C | H_0) = P(\bar{X} \leq c | H_0)$$

所以,

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

根據  $z_\alpha$  的定義, 可得

$$\frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha$$

因此,

$$c = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{10.4}$$

母體平均數左尾檢定的拒絕域為

$$C = \left\{ \bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \tag{10.5}$$

其意旨統計檢定要否定  $H_0: \mu \geq \mu_0$  的假設, 不是樣本平均數小於參考點即可, 還要再低上一些。統計檢定又為顯著性檢定, 其說明我們根據樣本判定虛無假設為否, 必須是有顯著性的證據, 可能不能

隨便說說。同理, 我們可以推導出右尾檢定和雙尾檢定的結果, 整理在表 10.3。

表 10.3: 臨界值法 (三種檢定類型的拒絕域)

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\begin{cases} \bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ 或} \\ \bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$	$\bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

**例 10.8.**

假設某公司生產之巧克力重量的標準差為 4 公克。該公司宣稱其巧克力淨重平均重量超過 100 公克, 今於販賣場隨機抽取該產品 25 件, 得其平均數為 98.4 公克, 請以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定此廠商宣稱是否為真? (假設母體具常態分配)

↓ 9

**解 .**

1. 設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 100 \\ H_1: \mu < 100 \end{cases} \quad \alpha = 0.00273$$

2. 選擇檢定統計量。

$$\bar{X} = 98.4$$

3. 決定拒絕域。

$$\begin{aligned} c &= \mu_0 - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 100 - 1.645 \times \frac{4}{\sqrt{25}} = \underline{98.684} \\ C &= \{ \bar{X} < 98.684 \} \end{aligned}$$

4. 結論。

因為  $\bar{X} = 98.4$  落在  $C$  內, 故拒絕  $H_0$ , 即證據足以否定廠商的宣稱。



上述建構拒絕域的方法稱為臨界值法, 也就是把樣本平均值的臨界點計算出來。當我們將樣本平均值標準化, 其分配為  $N(0, 1)$ , 即

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \tag{10.6}$$

式10.5的標準化為

$$C = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \right\} = \{Z < -z_\alpha\} \quad (10.7)$$

又的標準分數

僅要比較樣本平均數的標準值與標準常態的臨界值就可以進行統計檢定了。

表 10.4: Z 值法 (三種檢定類型的拒絕域)

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$Z < -z_{\alpha/2}$ 或 $Z > z_{\alpha/2}$	$Z < -z_\alpha$	$Z > z_\alpha$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

**例 10.9.** 接續例 10.8  
改用 Z 值法。

**解 .**

1. 設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 100 \\ H_1: \mu < 100 \end{cases}$$

2. 選擇檢定統計量。(計算  $\bar{X}$  的標準分數)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{98.4 - 100}{4/\sqrt{25}} = -2$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, z_{0.05} = 1.645$$

$$C = \{Z < -1.645\}$$

4. 結論。

因為  $Z = -2$  落在  $C$  內, 故拒絕  $H_0$ , 即證據足以否定廠商的宣稱。

**定義 10.4.**

電腦分析報告

令檢定統計量 Z 值為  $z_0$  其  $P_{value}$  的定義如下

$$\begin{aligned} \text{右尾: } P_{value} &= P(Z > z_0) \\ \text{左尾: } P_{value} &= P(Z < z_0) \\ \text{雙尾: } P_{value} &= 2P(Z > |z_0|) \end{aligned} \quad (10.8)$$

以右尾檢定為例, 已知  $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ , 若  $z_0 > z_\alpha$  拒絕  $H_0$ , 則若且唯若  $P_{value} = P(Z > z_0) < \alpha$ 。其他兩種類型的檢定, 亦可以相同的結論。

**定理 10.1.**

若檢定統計量的  $P_{value} < \alpha$  則若且唯若拒絕  $H_0$ 。我們稱此法為  $P$  值法。

**例 10.10.** 接續例 10.9  
改用  $P$  值法。

**解 .**

這是一個左尾檢定, 因為  $z_0 = -2$ , 所以,

$$P_{value} = P(Z < -2) = 0.0228$$

因為  $P_{value} < 0.05$ , 故拒絕  $H_0$ , 即證據足以否定廠商的宣稱。

任何一種檢定包含往後介紹的方法都有對應的  $P$  值法, 判斷準則都以統計量的  $P_{value}$  是否小於顯著水準  $\alpha$ 。所以, 電腦統計軟體都會輸出一個檢定的  $P_{value}$ , 只要  $P_{value} < \alpha$  我們就可以拒絕  $H_0$ 。

**10.2.2 常態母體, 變異數未知**

因為

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \sim t(n-1) \tag{10.9}$$

根據第 9 章的討論, 我們僅要將上述拒絕域公式中, 所有標準常態臨界值  $z_\alpha$  或  $z_{\alpha/2}$ , 改成  $t_\alpha(n-1)$  或  $t_{\alpha/2}(n-1)$  即可。整理在表 10.5。

表 10.5: 母體變異數未知的臨界值法 ( $t_\alpha = t_\alpha(n-1)$ )

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X} < \mu_0 - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ 或} \\ \bar{X} > \mu_0 + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \end{array} \right.$	$\bar{X} < \mu_0 - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$



類似於  $Z$ , 我們將樣本平均數標準化得

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \tag{10.10}$$

將表 10.4 轉成表 10.6。

表 10.6:  $T$  值法  $t_\alpha = t_\alpha(n-1)$

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\begin{cases} T < -t_{\alpha/2} \text{ 或} \\ T > t_{\alpha/2} \end{cases}$	$T < -t_\alpha$	$T > t_\alpha$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

**例 10.11.** (續例 9.10)

在半導體製造的 *Si-Nitride* 爐管擴散製程, 沉積厚度為品質特性變數為常態隨機變數廠商宣稱製程平均值為 1650。今抽樣量測 5 片晶片的 *Si-Nitride* 沉積厚度為

$$1623, 1670, 1625, 1633, 1649$$

請問證據是否支持廠商的宣稱?  $\alpha = 0.05$

**解 .**

1. 設設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1650 \\ H_1: \mu \neq 1650 \end{cases}$$

2. 選擇檢定統計量。  
先計算基本統計量

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1623 + 1670 + 1625 + 1633 + 1649}{5} = 1640 \\ S^2 &= \frac{(-17)^2 + 30^2 + (-15)^2 + (-7)^2 + 9^2}{4} = \frac{1544}{4} = 386 \\ s &= \sqrt{386} = 19.65 \end{aligned}$$

所以, 檢定統計量為

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 1650}{19.65/\sqrt{5}} = -1.14$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, t_{0.025}(4) = 2.776$$

$$C = \{T < -2.776 \text{ 或 } T > 2.776\}$$

4. 結論。

因為  $T = -1.14$  不落在  $C$  內, 故無法拒絕  $H_0$ , 即證據不足以否定廠商的宣稱。

檢定統計量的  $P$  值為

$$P_{value} = 2P(T > |-1.14|) = 2P(T > 1.14) = 0.31$$

因為  $P_{value} > 0.05$ , 故無法拒絕  $H_0$ 。

### R 程式

R 語法如下:

```
t.test(x, y = NULL,
       alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
       mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE,
       conf.level = 0.95, ...)
```

1. “ $x, y = NULL$ ”, 資料輸入, 單筆  $y$  可以省略。
2. “ $alternative = c("two.sided", "less", "greater")$ ” 對立假設的型態, 三選一。
3. “ $mu = 0$ ” 平均值設定。
4. “ $paired = FALSE$ ” 是否成對資料?
5. “ $var.equal = FALSE$ ” 是否變異數相等?
6. “ $conf.level = 0.95$ ” 信心水準。

```
> x<-c(1623,1670,1625,1633,1649)
> t.test(x,alternative="two.sided",mu=1650,conf.level=0.95)
```

```
One Sample t-test
檢定統計量 自由度 檢定力
data: x
t = -1.1381 df = 4, p-value = 0.3186
alternative hypothesis: true mean is not equal to 1650
95 percent confidence interval:
1615.605 1664.395 信賴區間
sample estimates:
mean of x
1640
```



### 10.2.3 大樣本

當母體分配未知，但樣本大小  $n \geq 30$ ，根據中央極限定理，樣本平均數的抽樣分配近似常態。即當  $\mu = \mu_0$  時，

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n) \tag{10.11}$$

當變異數已知時，

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \tag{10.12}$$

當變異數未知時，亦有

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \tag{10.13}$$

故我們將表 10.3 和表 10.4 做適當修改可得臨界值法的表 10.7和 Z 值法的表10.8。

表 10.7: 大樣本之臨界值法 (三種檢定類型的拒絕域)

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\begin{cases} \bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ 或} \\ \bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \end{cases}$	$\bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

表 10.8: 大樣本 Z 值法 (三種檢定類型的拒絕域)

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$Z < -z_{\alpha/2} \text{ 或 } Z > z_{\alpha/2}$	$Z < -z_{\alpha}$	$Z > z_{\alpha}$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

**例 10.12.** 接續例 10.11

今抽樣量測 36 片晶片，得到相同樣本平均值與標準差，即  $\bar{X} = 1640, s = 19.65$ 。請問證據是否支持廠商的宣稱？  $\alpha = 0.05$

**解** .

1. 設設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1650 \\ H_1 : \mu \neq 1650 \end{cases}$$

2. 檢定統計量為

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 1650}{19.65/\sqrt{36}} = -3.05$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96$$

$$C = \{Z < -1.96 \text{ 或 } Z > 1.96\}$$

4. 結論。

因為  $Z = -3.05$  落在  $C$  內，故拒絕  $H_0$ ，即證據足以否定廠商的宣稱。

註：少數樣本反應的事實不夠顯著，同樣的統計量若是來自大量樣本，則有強化此一事實的意義，故容易產生拒絕  $H_0$  的結果。

■

## 10.3 母體比例之假設檢定

有關母體比例之假設檢定的理論推導與第 9 章母體比例信賴區間的建構類似。我們假設資料是來自白努利隨機實驗，讓  $X$  代表  $n$  次實驗的總和，則  $X$  服從  $bin(n, p)$ 。在大樣本下  $n \geq 30$ ，根據中央極限定理樣本比例  $\hat{p}$  具有近似常態分配，但近似效果與  $p$  值有關。當  $(n, p)$  滿足

$$np \geq 5 \text{ 且 } n(1-p) \geq 5 \quad (10.14)$$

時， $\hat{p}$  近似常態分配方可成立。樣本比例的近似分配為

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{\sigma_p^2}{n}\right) \quad (10.15)$$

其中  $\sigma_p^2 = p(1-p)$ 。以左尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \quad (10.16)$$

為例，在  $H_0$  為真時 ( $p = p_0$ )，樣本比例的抽樣分配為

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right) \quad (10.17)$$

將式 (10.4) 中的  $\sigma$  用  $\sigma_p = \sqrt{p_0(1-p_0)}$  代入，得

$$c = p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad (10.18)$$

母體比例之左尾檢定的拒絕域為

$$C = \left\{ \hat{p} < p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} \quad (10.19)$$

舉一反三可得其他檢定類型的拒絕域，列於表 10.9 之中。

表 10.9: 母體比例之臨界值法拒絕域

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
$H_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p \geq p_0$	$H_0 : p \leq p_0$
$H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\begin{cases} \hat{p} < p_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \\ \text{或} \\ \hat{p} > p_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \end{cases}$	$\hat{p} < p_0 - z_{\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + z_{\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

我們將樣本比例標準化得

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1) \tag{10.20}$$

將式 (10.19) 左尾檢定的拒絕域改為如下  $Z$  值法的拒絕域

$$C = \{Z < -z_{\alpha}\} \tag{10.21}$$

因此，用表 10.4 進行母體比例的假設檢定，僅將虛無假設的  $\mu$  和  $\mu_0$  分別用  $p$  和  $p_0$  取代即可，得表 10.10。

表 10.10: 母體比例之  $Z$  值法拒絕域

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p \geq p_0$	$H_0 : p \leq p_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$Z < -z_{\alpha/2}$ 或 $Z > z_{\alpha/2}$	$Z < -z_{\alpha}$	$Z > z_{\alpha}$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

以下這些例子與第 9 章相同，差別是用檢定方法進行推論。

**例 10.13.**

某民意調查機構欲瞭解某次中壢市市長選舉各候選人之支持度，於是隨機抽取 300 位選民作調查，發現支持現任市長者有 75 位，請以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定現任市長的支持度是否低於 30% ?

**解 .**

1. 設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.3 \\ H_1 : p < 0.3 \end{cases}$$

2. 選擇檢定統計量。

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{75}{300} = 0.25, \quad \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{300}} = 0.0265$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}} = \frac{0.25 - 0.3}{0.0265} = -1.87$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, z_{0.05} = 1.645$$

$$C = \{Z < -1.645\}$$

4. 結論。

因為  $Z = -1.87$  落在  $C$  內, 故拒絕  $H_0$ , 即證實現任市長的支持度是低於 30%。

■

#### 例 10.14.

在一次桃園縣政府之滿意度調查中, 有效樣本為 1068 位, 共有 522 縣民不滿意縣政, 請以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定縣民對桃園縣政府的不滿意度是否等於 50%?

#### 解 .

1. 設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0: p = 0.5 \\ H_1: p \neq 0.5 \end{cases}$$

2. 選擇檢定統計量。

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{522}{1068} = 0.489,$$

$$\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{1068}} = 0.0153$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}} = \frac{0.489 - 0.5}{0.0153} = -0.72$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96$$

$$C = \{Z < -1.96 \text{ 或 } Z > 1.96\}$$

4. 結論。

因為  $Z = -0.72$  不落在  $C$  內, 故無法拒絕  $H_0$ , 可說縣民對桃園縣政府的不滿意度達到 50%。

■



**例 10.15.**

大高公司欲證實其高階產品良率是否已經達到量產階段的 75%，抽測 200 個產品，有 160 個良品，請問該公司高階產品良率是否達到 75%？

**解 .**

1. 設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0: p \leq 0.75 \\ H_1: p > 0.75 \end{cases}$$

2. 選擇檢定統計量。

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{160}{200} = 0.8,$$

$$\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{200}} = 0.0306$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}} = \frac{0.8 - 0.75}{0.0306} = 1.634$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, z_{0.05} = 1.645$$

$$C = \{Z > 1.645\}$$

另外，

$$p_{value} = P(Z > 1.634) = 0.051$$

4. 結論。

因為  $Z = 1.636$  不落在  $C$  內 (或者  $p_{value} = 0.051 > 0.05$ )，故無法拒絕  $H_0$ ，可說檢驗結果不足以證實該公司高階產品良率已經達到 75%。

■

## 10.4 母體變異數之假設檢定

推論的方式與第 9 章相同，假設  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ ，則

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (10.22)$$

變異數 (標準差) 假設檢定的類型有以下三種。

$$1. \text{ 左尾檢定 } \begin{cases} H_0: \sigma \geq \sigma_0 \\ H_1: \sigma < \sigma_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

- 2. 右尾檢定  $\begin{cases} H_0: \sigma \leq \sigma_0 \\ H_1: \sigma > \sigma_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$
- 3. 雙尾檢定  $\begin{cases} H_0: \sigma = \sigma_0 \\ H_1: \sigma \neq \sigma_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$

我們以右尾檢定為例, 推導檢定的拒絕域:

- 1. 決定合適點估計統計量:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \text{ 爲 } \sigma^2 \text{ 的不偏估計式。}$$

- 2. 推導檢定統計量: 由式 (10.22), 在  $H_0$  為真的假設下, 我們令檢定統計量為

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \tag{10.23}$$

- 3. 拒絕域型態。配合對立假設拒絕域的型態為

$$C = \{\chi_0^2 > c\} \tag{10.24}$$

- 4. 計算決定  $c$  值。因為  $c$  值 滿足

$$P(\chi_0^2 > c | H_0) = \alpha \tag{10.25}$$

根據卡方分配臨界值的定義, 如圖 10.3 紅色面積為  $\alpha$ , 紅色面積左側橫軸端點為  $c = \chi_\alpha^2(n-$

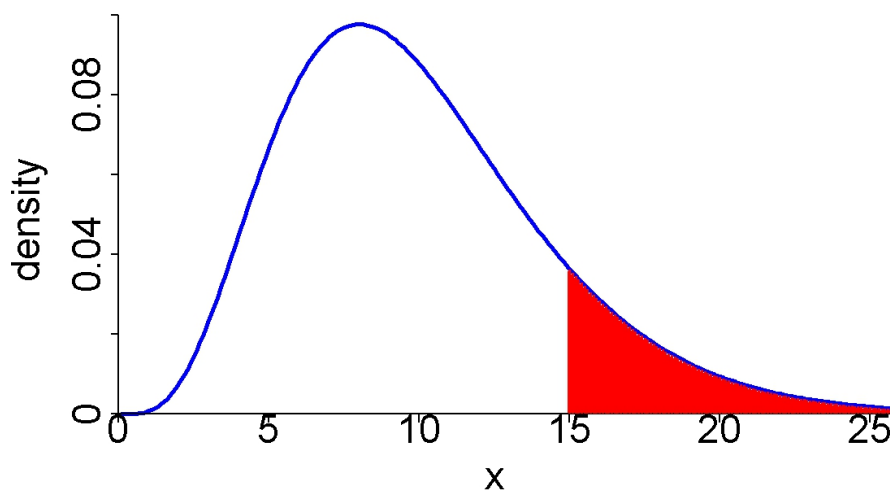


圖 10.3: 卡方分配的臨界值

- 1) 拒絕域為

$$C = \{\chi_0^2 > \chi_\alpha^2(n-1)\} \tag{10.26}$$

同理可得出其他兩種類型的拒絕域，列於表 10.11。

表 10.11: 母體變異數檢定之拒絕域

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 $H_0$	$H_0: \sigma = \sigma_0$	$H_0: \sigma \geq \sigma_0$	$H_0: \sigma \leq \sigma_0$
對立假設 $H_1$	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2$ 或 $\chi_0^2 > \chi_{\alpha/2}^2$	$\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha}^2$	$\chi_0^2 > \chi_{\alpha}^2$
$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha$	$\alpha$

**定義 10.5.**

假設  $\chi_0^2$  為檢定統計量，變異數假設檢定的  $P_{value}$  定義如下：

- 左尾檢定

$$P_{value} = P(X < \chi_0^2)$$

- 右尾檢定

$$P_{value} = P(X > \chi_0^2)$$

- 雙尾檢定

$$P_{value} = 2 \min \{P(X > \chi_0^2), P(X < \chi_0^2)\}$$



**例 10.16.**

假設某一製程在穩定狀況下其所生產產品標準差為 0.34 公分，今隨機抽出 5 個產品測得樣本標準差為 0.8 公分。假設該產品品質特性為常態分布，請問製程是否偏離穩定狀況？ ( $\alpha = 0.05$ )

**解 .**

1. 設立兩個假設

$$\begin{cases} H_0: \sigma = 0.34 \\ H_1: \sigma \neq 0.34 \end{cases}$$

2. 檢定統計量

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 \times 0.8^2}{0.34^2} = 22.14$$

3. 決定拒絕域

$$\alpha = 0.05, \chi_{0.025}^2(4) = 11.14, \chi_{0.975}^2(4) = 0.4844$$

$$C = \{\chi_0^2 > 11.14 \text{ 或 } \chi_0^2 < 0.4844\}$$

4. 結論：因為  $\chi_0^2 = 22.14$  落在  $C$  內，故拒絕  $H_0$ ，表示製程已經偏離穩定狀況。

**例 10.17.**

某工廠進螺帽一批，供應商宣稱此批貨的標準差小於 0.05。抽驗 10 個，測量每一個螺帽的直徑，如下：

$$1.20, 1.25, 1.27, 1.17, 1.30, 1.18, 1.23, 1.22, 1.33, 1.32$$

假設螺帽直徑為常態分布，請問是否否定供應商宣稱？（ $\alpha = 0.05$ ）

**解 .**

1. 設立兩個假設

$$\begin{cases} H_0: \sigma \leq 0.05 \\ H_1: \sigma > 0.05 \end{cases}$$

2. 檢定統計量

$$S^2 = 0.00325 = 3.25 \times 10^{-3}$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \times 3.25 \times 10^{-3}}{0.05^2} = 11.7$$

3. 決定拒絕域

$$\alpha = 0.05, \chi_{0.05}^2(9) = 16.92$$

$$C = \{\chi_0^2 > 16.92\}$$

4. 結論：因為  $\chi_0^2 = 11.7$  不落在  $C$  內，故無法拒絕  $H_0$ ，證據不足否定供應商宣稱。

或者，利用  $P$  值法

$$P_{value} = P(X > 11.7) = 0.264$$

因為  $P_{value} > 0.05$ ，故無法拒絕  $H_0$ 。

**例 10.18.**

圖 10.4 為本系品質管理實驗室切割器構造圖，可以用來切割圓條狀物品，如電線、吸管等。現在設定機器長度為 20 公厘，使用連續裁切吸管 20 段，使用圖 10.5 游標卡尺測得吸管長度紀錄如下，假設裁切長度分布為常態，請問裁切長度是否偏離目標值（20公厘）。

$$20.16, 20.01, 19.68, 19.70, 19.88, 20.00, 20.12, 19.86, 19.60, 19.84$$

$$20.07, 20.03, 19.99, 19.73, 19.96, 19.83, 19.71, 19.85, 20.10, 20.15$$

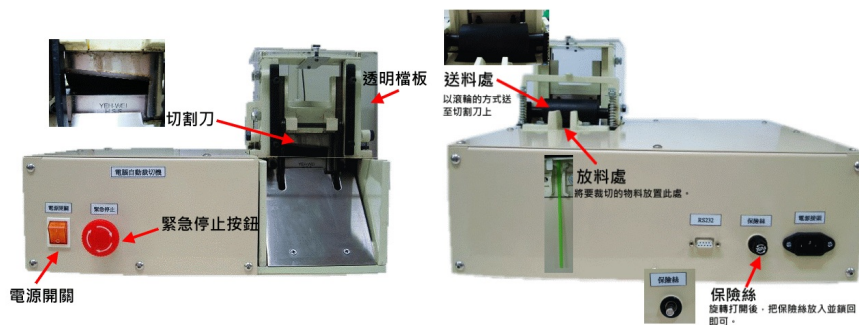


圖 10.4: 切割機的正反面圖

**解**

1. 設設立兩個假設。

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{cases}$$

2. 選擇檢定統計量。

先計算基本統計量

$$\bar{X} = \frac{20.16 + 20.01 + \dots + 20.10 + 20.15}{20} = \frac{398.27}{20} = 19.9135$$

$$S^2 = \frac{20.16^2 + 20.01^2 + \dots + 20.10^2 + 20.15^2 - 20 \times 19.9135^2}{19} = 0.02899$$

$$s = \sqrt{0.02899} = 0.17$$

所以，檢定統計量為

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{19.9135 - 20}{0.17/\sqrt{20}} = -2.27$$

3. 決定拒絕域。

$$\alpha = 0.05, t_{0.025}(19) = 2.09$$

$$C = \{T < -2.09 \text{ 或 } T > 2.09\}$$

4. 結論。

因為  $T = -2.27$  落在  $C$  內，故拒絕  $H_0$ ，表示裁切長度已經偏離目標值。

**例 10.19.** 接續例 10.18

假設要求切割機裁切吸管的標準差不得超過 0.15 公厘，請問這組資料是否足以證實標準差超過 0.15 公厘。

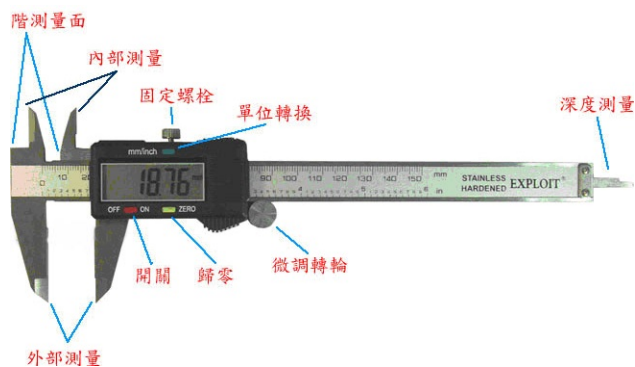


圖 10.5: 數位游標卡尺

**解**

1. 設立兩個假設

$$\begin{cases} H_0: \sigma \leq 0.15 \\ H_1: \sigma > 0.15 \end{cases}$$

2. 檢定統計量

$$S^2 = 0.0289$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \times 0.0289}{0.15^2} = 24.4$$

3. 決定拒絕域

$$\alpha = 0.05, \chi_{0.05}^2(19) = 30.142$$

$$C = \{\chi_0^2 > 30.14\}$$

4. 結論: 因為  $\chi_0^2 = 24.4$  不落在  $C$  內, 故無法拒絕  $H_0$ , 證據不足以證實標準差超過 0.15 公厘。





## 10.5 習題

1. 平均數之假設檢定的拒絕域為  $\{Z > z_\alpha\}$ , 其對立假設為
  - (a)  $H_1: \mu \neq \mu_0$
  - (b)  $H_1: \mu > \mu_0$
  - (c)  $H_1: \mu < \mu_0$
  - (d)  $H_1: \mu = \mu_0$

2. 若對立假設為  $H_1: \mu \neq \mu_0$ , 採用  $Z$  統計檢定量方法進行檢定, 在顯著水準為  $\alpha$  的情形下的拒絕域為

- (a)  $\{Z > z_{\alpha/2} \text{ 或 } Z < -z_{\alpha/2}\}$
- (b)  $\{Z > z_\alpha\}$
- (c)  $\{Z < -z_\alpha\}$
- (d)  $\{Z > z_\alpha \text{ 或 } Z < -z_\alpha\}$

3. 假設某工廠生產的飲料重量為一常態分布, 今抽驗 10 瓶飲料的重量 (公克) 如下:

345, 353, 355, 353, 348, 352, 351, 349, 346, 348

- (a) 該飲料瓶罐上標示產品重量為 355 公克, 然消費者質疑其產品重量不足, 根據上題抽檢數據, 試問證據是否支持消費者的質疑? ( $\alpha = 0.05$ )
- (b) 請檢定飲料重量變異數是否大於 5。 ( $\alpha = 0.05$ )

4. 假設  $X_1, \dots, X_9 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, 3^2)$ , 虛無假設為  $H_0: \mu = 55$ , 拒絕域為  $C = \{\bar{X} > 56.5, \text{ 或 } \bar{X} < 53.5\}$ , 請計算型 I 錯誤的機率。

5. 接續上題, 希望估計平均數  $\mu$  的抽樣誤差不超過 0.75, 信心水準達 95%, 請問樣本大小至少為何?

6. 經過效益評估, 生產某新型高科技電子產品良率需達 60% 才會經濟效應。今抽驗 100 顆產品, 其中有 63 個良品, 請問根據抽驗結果, 生產該型產品良率是否已經達到經濟效應? ( $\alpha = 0.05$ )

- (a) 樣本比例: \_\_\_\_\_。
- (b) 對立假設: \_\_\_\_\_。
- (c) 檢定統計量: \_\_\_\_\_。
- (d) 拒絕域: \_\_\_\_\_。
- (e) 結論: \_\_\_\_\_。

7. 某餐飲連鎖店為擴大消費族群, 推出一系列針對新顧客的廣告活動, 期使首次到店消費的顧客比例提升至 15%。隨機訪問 200 個消費者, 其中有 40 為首次消費顧客, 請問其推出的廣告活動是否達到預期的目的? ( $\alpha = 0.05$ )

- (a) 樣本比例: \_\_\_\_\_。
- (b) 對立假設: \_\_\_\_\_。
- (c) 檢定統計量: \_\_\_\_\_。
- (d) 拒絕域: \_\_\_\_\_。
- (e) 結論: \_\_\_\_\_。