隨機變數

李水彬Shuipin
2023/10/25

隨機變數

將樣本空間的元素轉換成實數值的函數

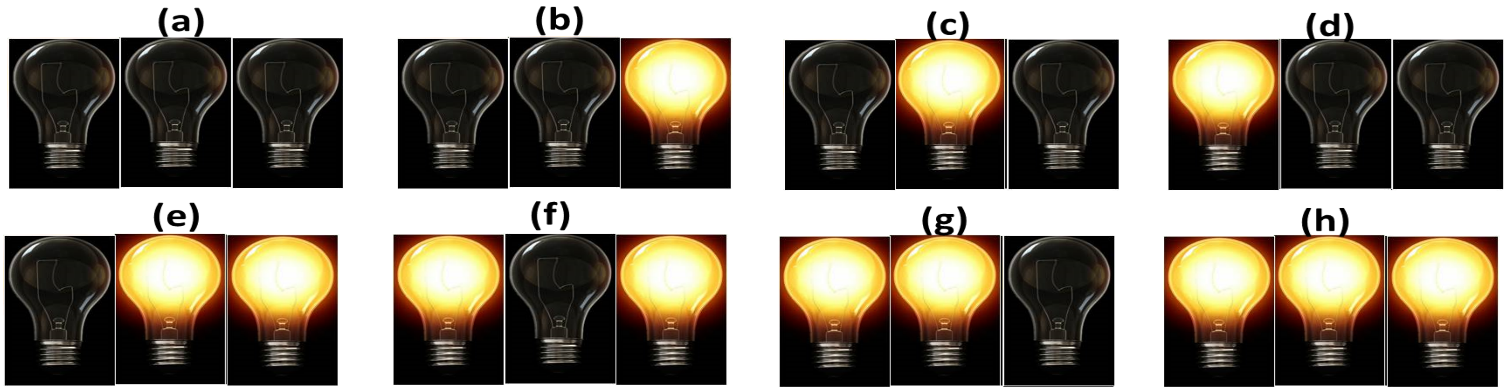
$$X : \Omega \mapsto \mathbf{R}$$

Ω: 樣本空間

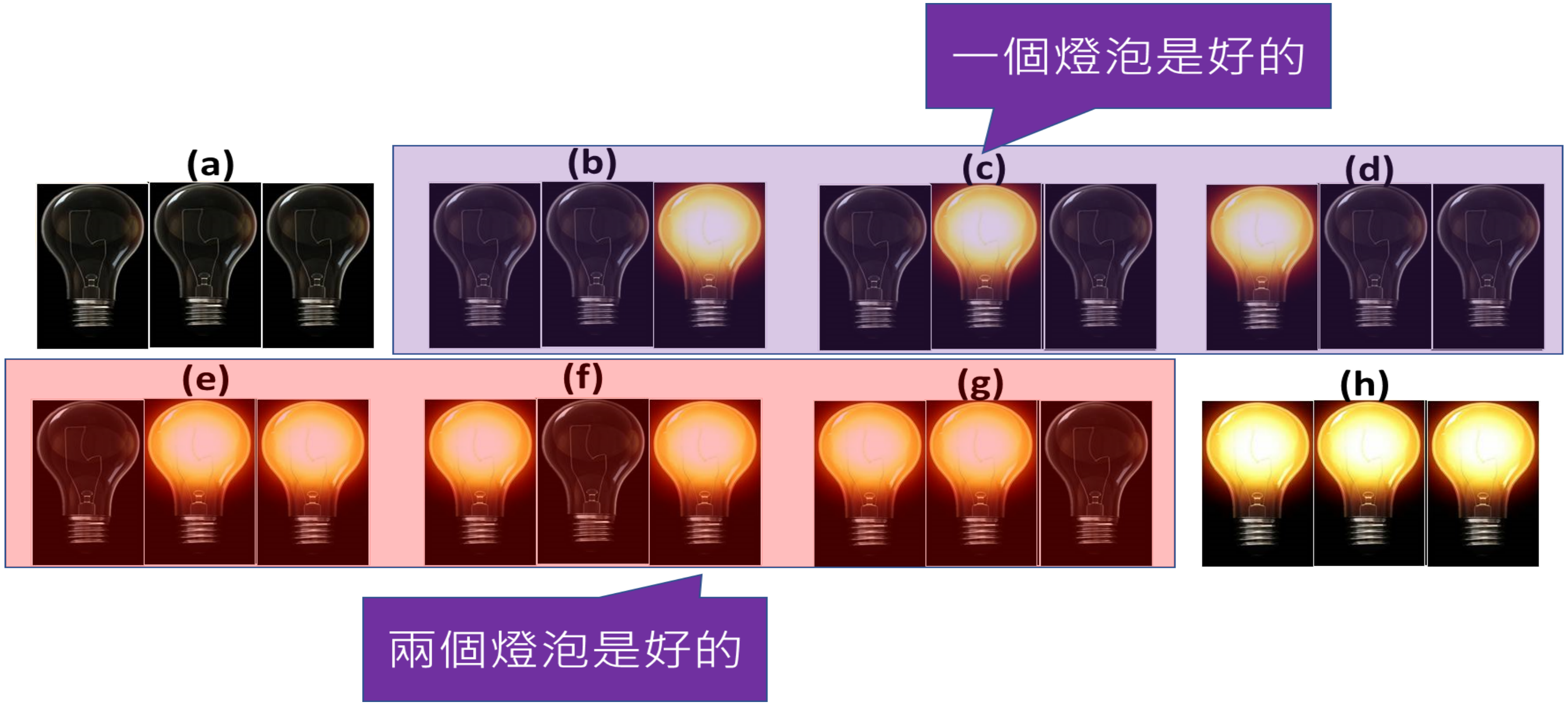
$\mathbf{R}$: 實數

樣本空間

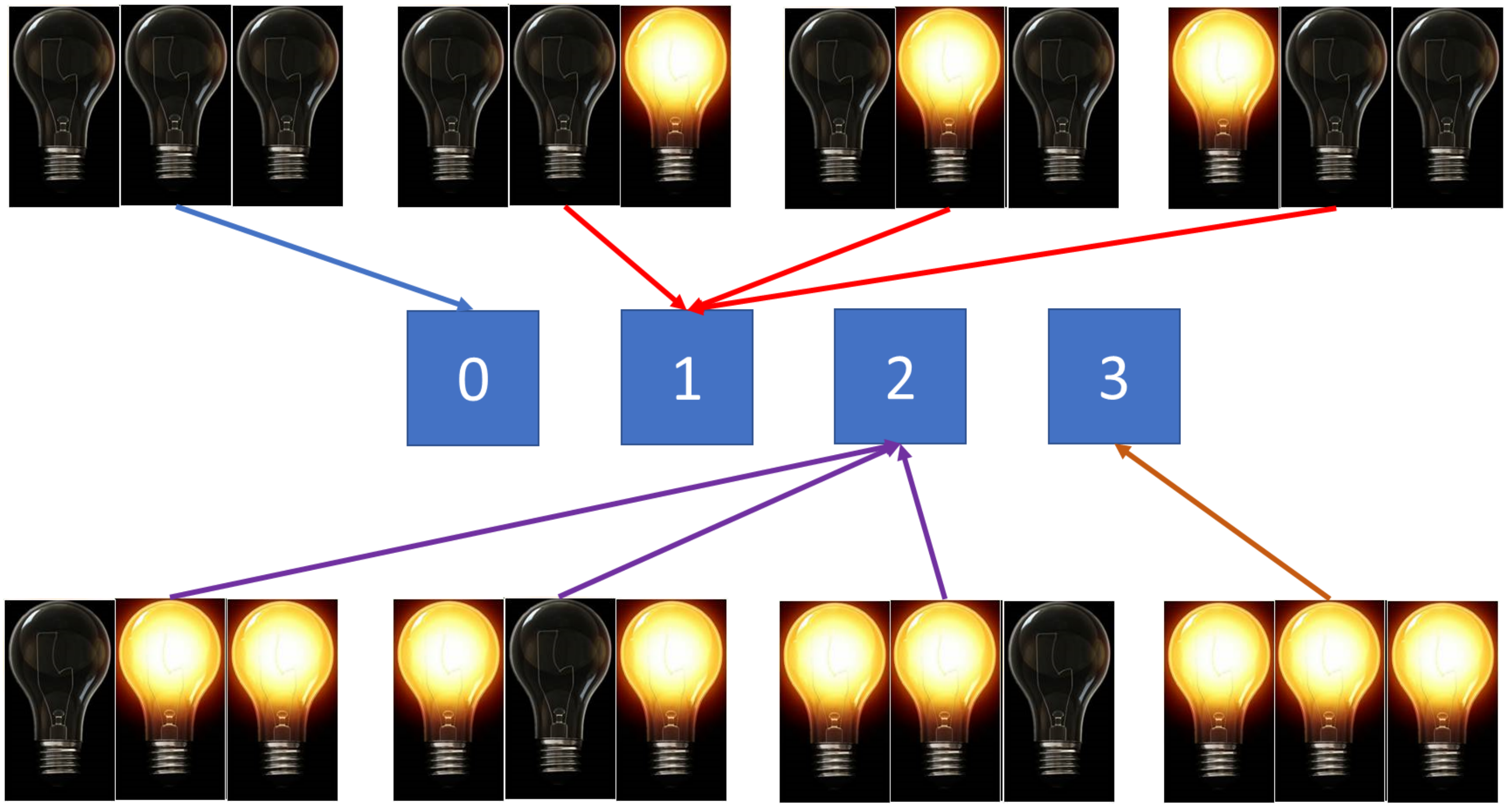
檢驗三顆燈泡的樣本空間(Ω)



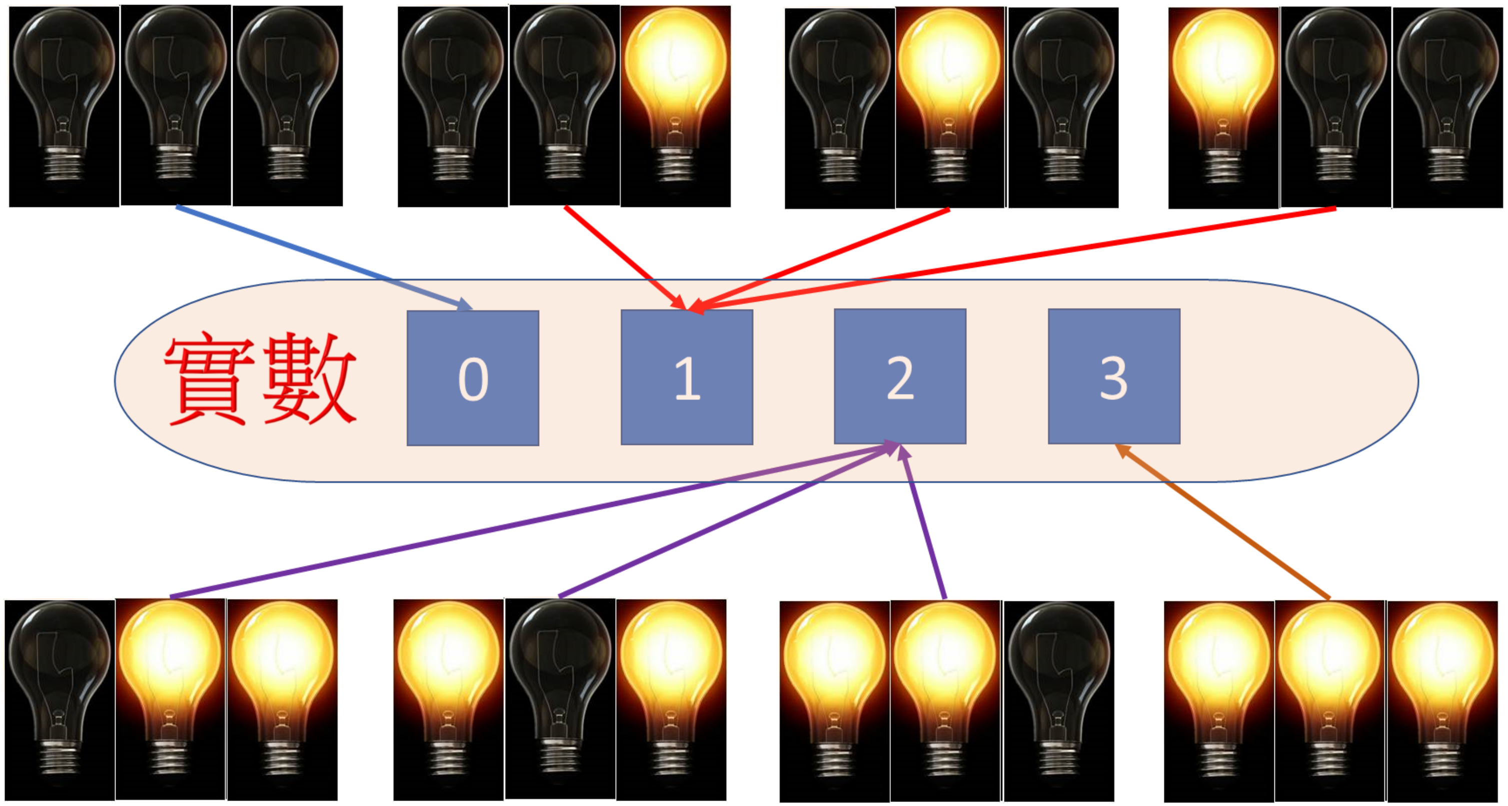
亮幾個?



樣本空間 vs 亮幾個

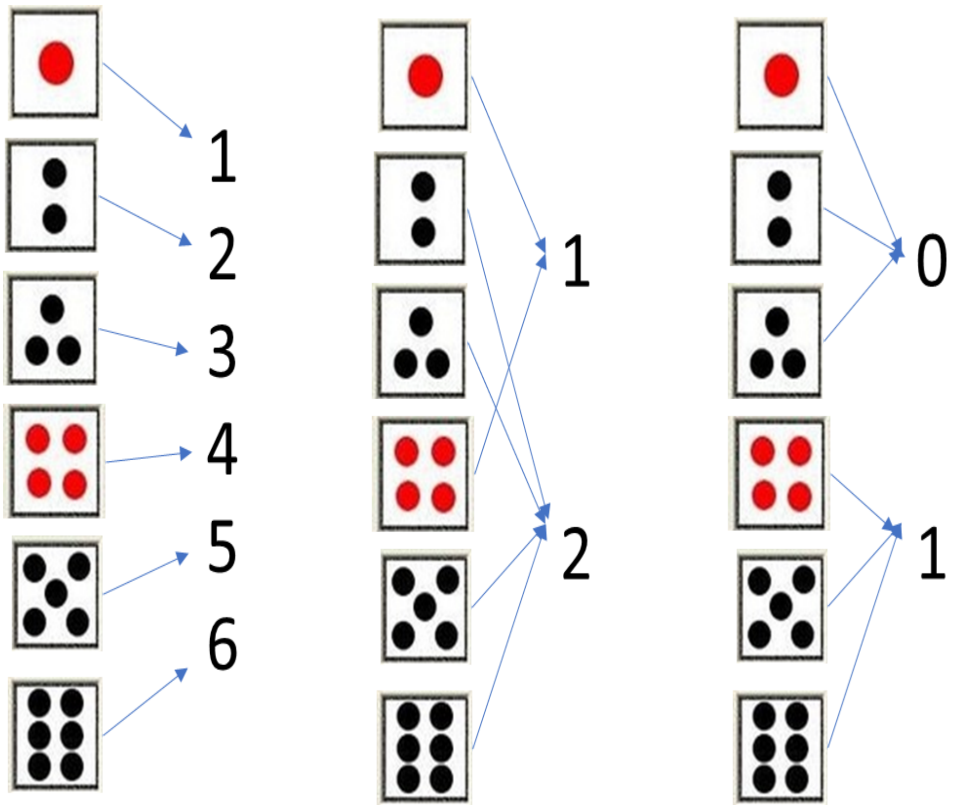


樣本空間 vs 實數



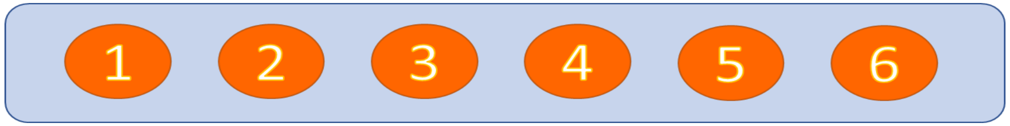
範例

根據需要定義對應關係

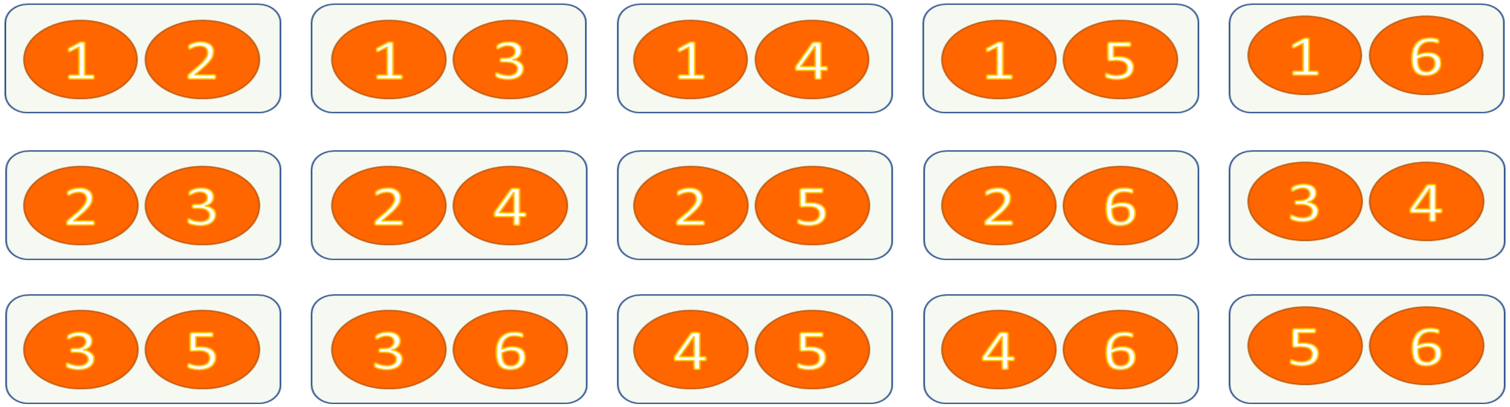


範例

號碼球，隨機抽兩個。

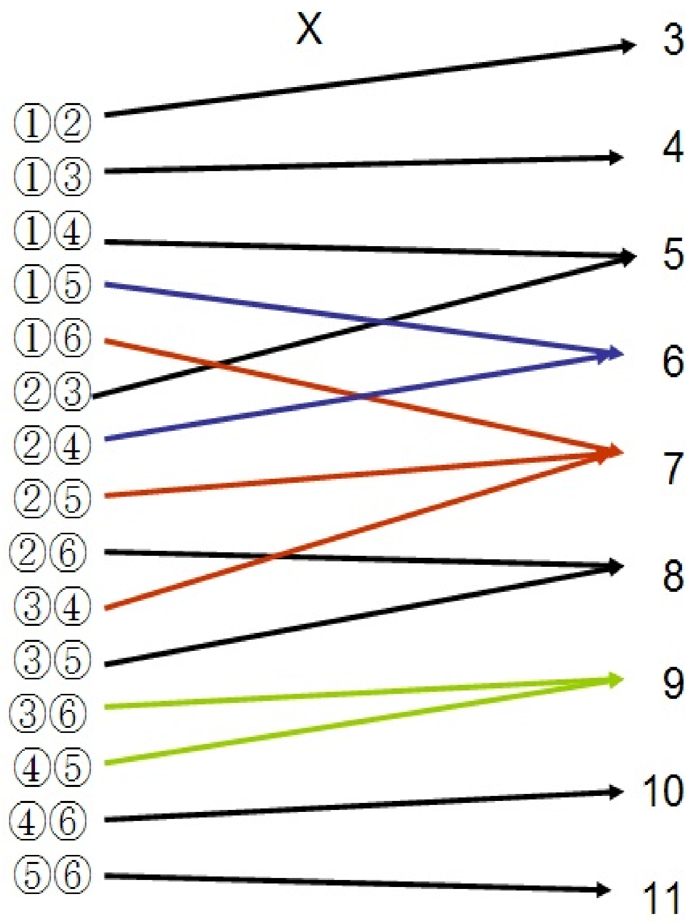


可能結果



隨機變數X的可能值為 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

$$X : \Omega \mapsto \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$



機率分配

隨機變數 X 每一個可能值 x 發生的機率, 稱之為隨機變數X 的機率分配。

$$f(x) = P(X = x)$$

範例

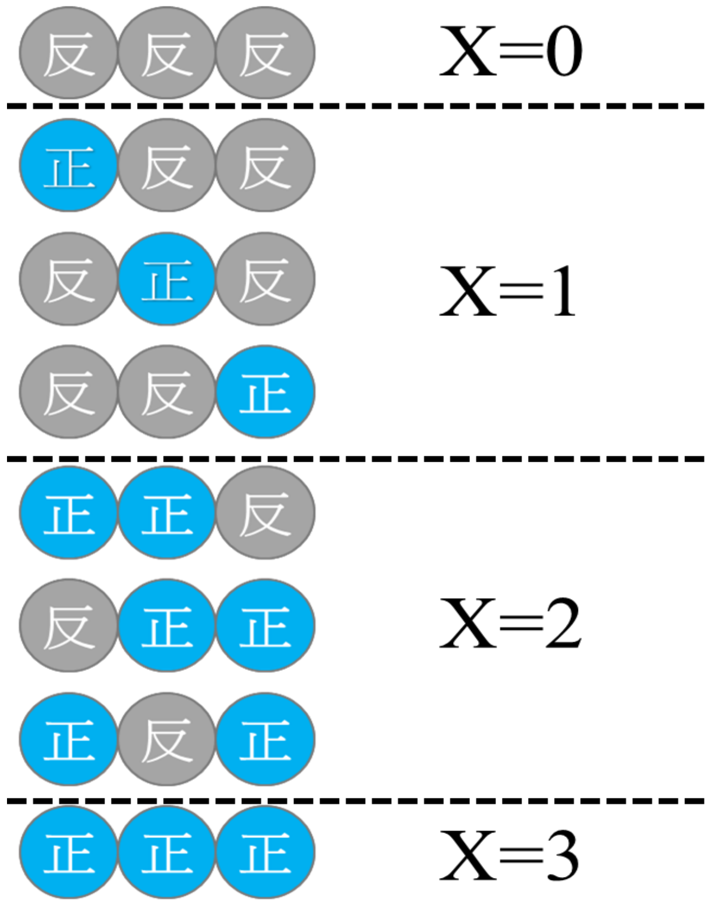
隨機變數 X 為擲一個公平的銅板 3次 出現正面的次數, X 的可能結果為 $0, 1, 2, 3$。X的機率分配 $f(x)$為

$$f(0) = P(X = 0) = 1/8$$

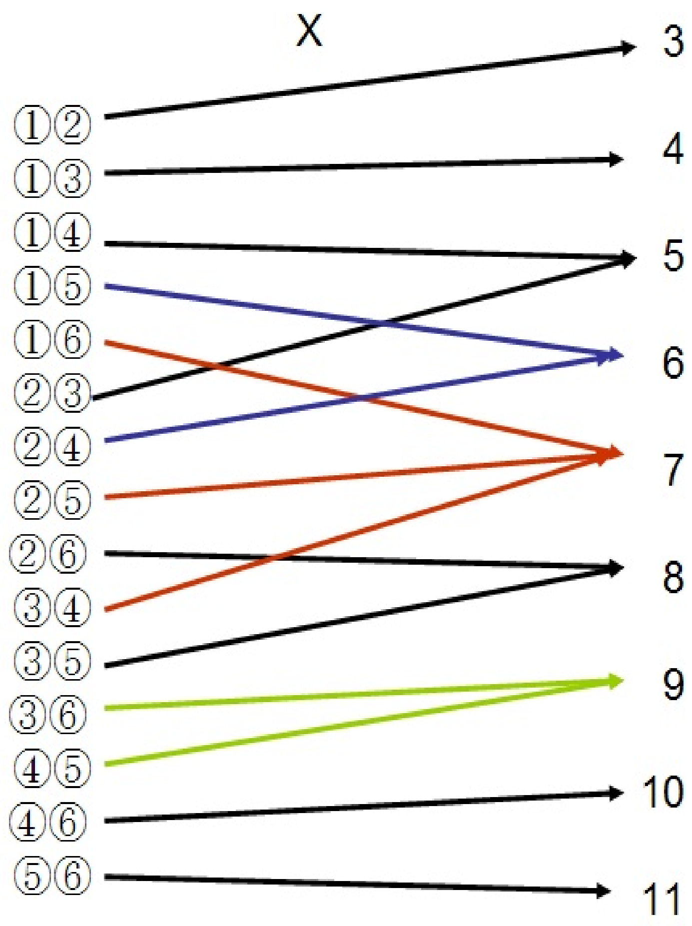
$$f(1) = P(X = 1) = 3/8$$

$$f(2) = P(X = 2) = 3/8$$

$$f(3) = P(X = 3) = 1/8$$



範例



x	次數	$f(x)$
3	1	1/15
4	1	1/15
5	2	2/15
6	2	2/15
7	3	3/15
8	2	2/15
9	2	2/15
10	1	1/15
11	1	1/15

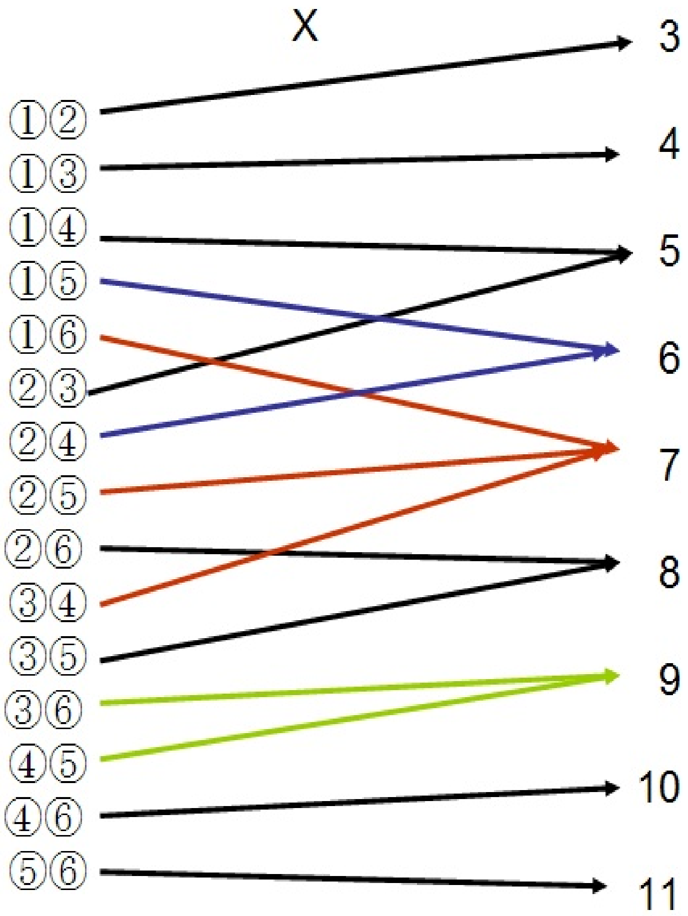
累積分配函數

隨機變數 X 的累積分配函數 (cumulative distribution function, CDF) $F(x)$ 定義為

$$F(x) = P(X \leq x)$$

可能結果	x	次數	$f(x)$	$F(x)$
(反反反)	0	1	1/8	1/8
(正反反),(反正反),(反反正)	1	3	3/8	4/8
(正正反),(反正正),(正反正)	2	3	3/8	7/8
(正正正)	3	1	1/8	8/8

範例



x	次數	$f(x)$	$F(x)$
3	1	1/15	1/15
4	1	1/15	2/15
5	2	2/15	4/15
6	2	2/15	6/15
7	3	3/15	9/15
8	3	2/15	11/15
9	2	2/15	13/15
10	1	1/15	14/15
11	1	1/15	15/15

離散型機率分配

假設一個隨機變數 X 的可能值為可數 (countable) 個時, 以

$$x_1, x_2, \cdots$$

表示之，我們稱 X 為離散型隨機變數。 其機率分配函數為

$$f(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \cdots$$

其他情況 $f(x) = 0$, 若 $x \neq x_1, x_2, \cdots$

離散型機率分配

離散型機率分配的性質:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum f(x) = 1$
- $P(X \in E) = \sum_{x \in E} f(x)$

也就是

- 機率不能為負值
- 機率值總和為 1
- 機率的可加性

範例

假設隨機變數 X 的機率分配如下:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

請問 c 值。

範例

假設隨機變數 X 的機率分配如下:

x	1	3	4	7	8
$f(x)$	0.1	0.2	k	0.3	0.2

請問 k 值。

累積分配函數

離散型隨機變數的累積分配函數 $F(x)$ 為

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

x	1	3	4	7	8	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2	1.0
$F(x)$	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0	-

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

隨機變數的期望值

擲一個骰子的樣本空間為

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- 實驗 20 次: 5 5 2 2 1 1 4 4 6 5 6 5 6 4 1 6 4 1 1 3

$$\bar{x} = \frac{5+5+2+\cdots+1+3}{20}$$

- 排序 1 1 1 1 1 2 2 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1+1+\cdots+6+6}{20} \\ &= \frac{5\times\textcolor{red}{1}+2\times\textcolor{red}{2}+1\times\textcolor{red}{3}+4\times\textcolor{red}{4}+4\times\textcolor{red}{5}+4\times\textcolor{red}{6}}{20} \end{aligned}$$

(續)

$$\bar{x} = \frac{5 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + 4 \times 4 + 4 \times 5 + 4 \times 6}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{5}{20} \times 1 + \frac{2}{20} \times 2 + \frac{1}{20} \times 3 + \frac{4}{20} \times 4 + \frac{4}{20} \times 5 + \frac{4}{20} \times 6$$

$$\bar{x} = 0.4 \times 1 + 0.1 \times 2 + 0.05 \times 3 + 0.2 \times 4 + 0.2 \times 5 + 0.2 \times 6$$

$$\text{樣本平均值} = \sum \text{出現的數值} \times \text{相對次數}$$

期望值

設離散隨機變數 X 的機率分配函數為 $f(x)$, 隨機變數 X 的期望值為

$$E(X) = \sum \boldsymbol{x} f(x)$$

範例

假設 X 的機率分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1	1.00

範例

假設 X 的機率分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1	1.00
$xf(x)$	0.4	0.6	0.6	0.4	2.0

$$E(X)=\sum_{x=1}^{4} xf(x) = 1\times 0.4 + 2\times 0.3 + 3\times 0.2 + 4\times 0.1 = 2$$

範例

已知一個離散型 R.V. X 的累積分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	0	1	2	3	合計
$F(x)$	0.1	0.3	0.6	1.0	-

範例

已知一個離散型 R.V. X 的累積分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	0	1	2	3	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0
$xf(x)$	0	0.2	0.6	1.2	2.0

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} xf(x) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 = 2$$

隨機變數函數的期望值

假設 $g(X)$ 為隨機變數的函數，則$g(X)$的期望值:

$$E(g(X)) = \sum g(x) f(x)$$

例如: $g(X) = X^2$

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x)$$

範例

假設 X 的機率分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.00

請求出 $E(X^2)$ 和 $E(3X+2)$ 之值。

範例

假設 X 的機率分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.00 x^2
$x^2 f(x)$	0.1	0.8	2.7	6.4	10.0

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.4 = 10$$

範例

假設 X 的機率分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.00 $3x+2$
$x^2 f(x)$	0.5	1.6	3.3	5.6	11.0

$$E(3X+2)=\sum(3x+2)f(x)$$

$$E(3X+2)=5\times 0.1+8\times 0.2+11\times 0.3+14\times 0.4=10$$

隨機變數的變異數

隨機變數X 的變異數定義為

$$Var(X) = E(X - \mu)^2$$

其中, $\mu = E(X)$為隨機變數 X 的期望值(平均值)。

變異數 $Var(X)$ 是衡量隨機變數 X 與其平均值 μ的差距程度。也可以表成

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

範例

假設 X 的機率分配函數如下, 請求 X 的期望值。

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.00

請求出 $Var(X)$ 和 $E(2X(X-0.5))$ 之值。

解:

- 步驟一: 計算期望值

$$\mu = E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.4 = 3.0$$

範例

- 步驟二: 計算$(x-\mu)$

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.00
$x-\mu$	-2	1	0	1	0

- 步驟三: 計算($(x-\mu)^2$)

$x-\mu$	-2	1	0	1
$(x-\mu)^2$	4	1	0	1

範例

- 步驟四: 計算變異數

x	1	2	3	4	合計
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1.00
$(x-\mu)^2$	4	1	0	1	-
$(x-\mu)^2 f(x)$	0.4	0.2	0	0.4	1.0

$$Var(X) = \sum (x-\mu)^2 f(x) = 0.4 + 0.2 + 0 + 0.4 = 1.0$$

重要性質

假設 a, b 為任意常數, - 函數 $g(X) = a + bX$ 的期望值為

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

當 $b = 0$, 得 $E(a) = a$, 表示常數的期望值等於其值。

- 函數 $g(X) = a + bX$ 的變異數為

$$Var(a + bX) = b^2 Var(X)$$

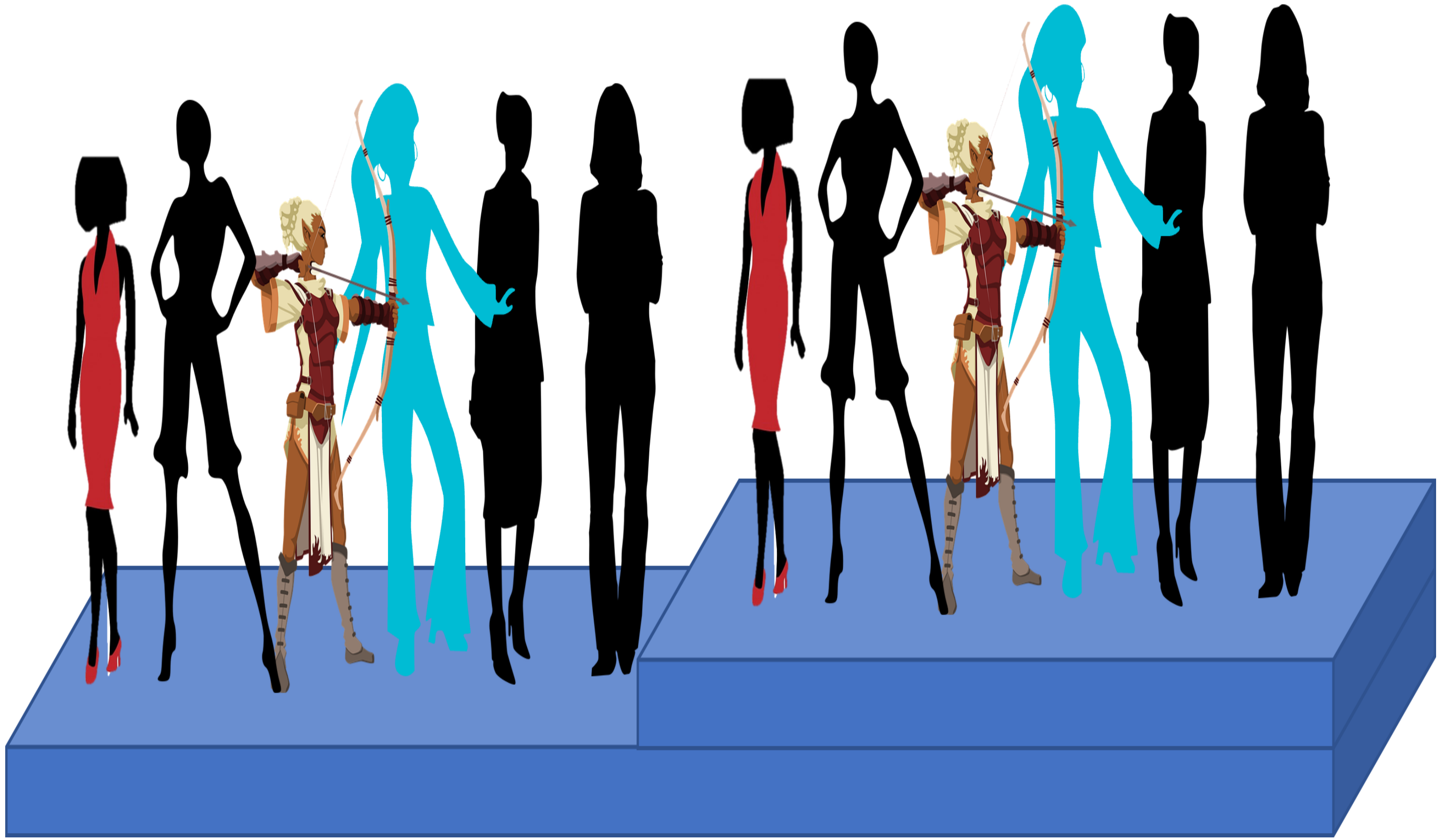
範例

假設 $E(X) = 5$ 和 $Var(X) = 4$:

- $E(3X + 5) = 3 \times 5 + 5 = 20$
- $Var(2 + 3X) = 3^2 \times 4 = 36$
- $E(X^2) = Var(X) + \mu^2 = 4 + 25 = 29$
- $E(-2X^2) = -2 \times 29 = -58$
- $Var(-2X) = (-2)^2 \times 4 = 16$

範例

- 站在相同的平台上，身高差異不會改變。



範例

5 位模特兒的身高資料如下表, 請比較以公尺為單位, 以公分為單位和每人穿 10 公分的高跟鞋下的樣本變異數與標準差。

編號	身高(公尺)	離差平方	身高(公分)	離差平方	穿高跟鞋	離差平方
1	1.65	0.0036	165	36	175	36
2	1.70	0.0001	170	1	180	1
3	1.73	0.0004	173	4	183	4
4	1.79	0.0064	179	64	189	64
5	1.68	0.0009	168	9	178	9
平均值	1.71		171		181	

本章結束