# 離散型機率分配-2

李水彬Shuipin

2023/10/25

# 白努利試驗

假若一個隨機實驗的可能結果僅有兩種, 我們稱此隨機實驗為白努利試驗 (Bernoulli Trials)。

- 擲一個銅板的隨機實驗, 樣本空間為 $\Omega = \{H, T\}$。
- 學生修統計學是否會被當, 其結果也只有兩種? $\Omega = \{Yes, No\}$
- 受訪者性別? $\Omega = \{Male, Female\}$
- 抽驗一個燈泡。 $\Omega = \{Good, Bad\}$

# 機率分配函數

令 $X$ 代表一個白努利試驗結果,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{正面, 通過, 男生} \\ 0, & \text{反面, 沒通過, 女生} \end{cases}$$

它的機率分配函數為

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, 1$$

其中 $p = P(X = 1)$ 代表此一試驗 **成功的機率**, 所以失敗的機率為 $1 - p$。

# 期望值與變異數

白努利隨機變數 $X$ 成功的機率為 $p$, 它的期望值與變異數為

$$E(X) = p, Var(X) = p(1-p)$$

**證明:**

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

# 二項分配

重複執行相同的白努利試驗 $n$ 次, 假設這些試驗的結果為 $X_1, \cdots, X_n$, 它們是 $n$ 個獨立且有相同的成功率 $p$ 的白努利試驗, 令 $X$ 代表這些白努利試驗成功次數的總和, 即

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

我們稱為 $X$ 稱二項隨機變數。

**相同: 每個白努利試驗的成功機率相同。**

# 範例

- 令 $X_i$ 代表第 $i$ 次擲銅板出現的結果, 這是一個白努利試驗。

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{正面} \\ 0, & \text{反面} \end{cases}, i = 1, \cdots, 20$$

令 $X = X_1 + \cdots + X_{20}$ 代表投擲 20 銅板出現正面的次數。

- 一個問卷調查中, 我們隨機訪問 10 位同學, 令 $Y_i$ 第 $i$ 個受訪者的性別。

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{男生} \\ 0, & \text{女生} \end{cases}, j = 1, \cdots, 10$$

讓 $Y = Y_1 + \cdots + Y_{10}$ 代表這此訪問中受訪男生總數。

# 機率值

檢驗10顆燈泡，洽有兩個是壞的組合數為

$$C_2^{10} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = \frac{90}{2} = 45$$

可能是這樣

也可能是這樣

每一種的機率都是(假設燈泡壞掉的機率為$p$)

$$p^2(1-p)^8$$

## x 個壞掉的機率

檢驗10顆燈泡，洽有兩個是壞的組合數為$C_2^{10}$，所以，洽有兩顆燈泡壞掉的機率

$$f(2) = P(X = 2) = C_2^{10} p^2 (1-p)^8$$

# 二項機率分配函數

檢驗 $n$ 顆燈泡，恰有 $x$ 個是壞的組合數為$C_x^n$ ，所以， 恰有 $x$ 個燈泡壞掉的機率

$$f(x) = P(X = x) = C_x^n p^x (1 - p)^{n-x}$$

為甚麼是$n - x$? 當有$x$個燈泡壞掉，就會有$n - x$是好的。

# 期望值與變異數

二項隨機變數是$n$個獨立且相同的白努力試驗的和，所以，它的期望值為

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_n) = np$$

變異數為

$$Var(X) = Var(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = np(1-p)$$

# 二項機率分配表

假設產品的不良率為 0.1, 今檢驗5的產品, 令 $X$ 代表不良品個數, 請問:

- $X=1$ 的機率,

$$\begin{aligned} P(X=1) = & \quad f(1) = C_1^5 0.1^1 \times 0.9^4 \\ = & \quad 0.5 \times 0.9^4 \end{aligned}$$

- $X \leq 1$ 的機率,

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) = & \quad f(0) + f(1) \\ = & \quad C_0^5 0.1^0 \times 0.9^5 + C_1^5 0.1^1 \times 0.9^4 \end{aligned}$$

- $X \geq 4$ 的機率。

$$P(X \leq 4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

| | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5905 | 0.3277 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 |
| 1 | 0.3280 | 0.4096 | 0.3601 | 0.2592 | 0.1562 |
| 2 | 0.0729 | 0.2048 | 0.3087 | 0.3456 | 0.3125 |
| 3 | 0.0081 | 0.0512 | 0.1323 | 0.2304 | 0.3125 |
| 4 | 0.0005 | 0.0064 | 0.0284 | 0.0768 | 0.1562 |
| 5 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0024 | 0.0102 | 0.0312 |

# 二項機率分配表: 範例1

假設產品的不良率為 0.1, 今檢驗5的產品, 令 $X$ 代表不良品個數, 請問:

- $X=1$ 的機率,

$$\begin{aligned} P(X=1) = & \quad f(1) = C^5_1 0.1^1 \times 0.9^4 \\ = & \quad 0.5 \times 0.9^4 \end{aligned}$$

- $X \leq 1$ 的機率,

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) = & \quad f(0) + f(1) \\ = & \quad C^5_0 0.1^0 \times 0.9^5 + C^5_1 0.1^1 \times 0.9^4 \end{aligned}$$

- $X \geq 4$ 的機率。

$$P(X \leq 4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

| | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5905 | 0.3277 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 |
| 1 | 0.9185 | 0.7373 | 0.5282 | 0.3370 | 0.1875 |
| 2 | 0.9914 | 0.9421 | 0.8369 | 0.6826 | 0.5000 |
| 3 | 0.9995 | 0.9933 | 0.9692 | 0.9130 | 0.8125 |
| 4 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9976 | 0.9898 | 0.9688 |
| 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

# 範例2

假設一個袋中有 5 顆紅球(red)和15顆白球(white)。 每一次從袋中抽出一球後放回, 令 $X$ 代表 $4$次抽樣紅球被抽中的次數。 請問:

- $X$ 的機率分配為何?

$$Bin(4, 0.25)$$

- 紅球被抽中的次數恰好1次的機率?

$$P(X=1)=P(X\leq 1)-P(X=0)$$

- 紅球被抽中的次數最多2次的機率?

$$P(X\leq 2)$$

| | 0.1 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.6561 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1296 |
| 1 | 0.9477 | 0.8192 | 0.7383 | 0.6517 | 0.4752 |
| 2 | 0.9963 | 0.9728 | 0.9492 | 0.9163 | 0.8208 |
| 3 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9961 | 0.9919 | 0.9744 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

# 範例3

假設 $X \sim Bin(5, 0.2)$ 請問

- $f(2)$
- $P(X < 2)$
- $P(X > 2)$

| | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5905 | 0.3277 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 |
| 1 | 0.3280 | 0.4096 | 0.3601 | 0.2592 | 0.1562 |
| 2 | 0.0729 | 0.2048 | 0.3087 | 0.3456 | 0.3125 |
| 3 | 0.0081 | 0.0512 | 0.1323 | 0.2304 | 0.3125 |
| 4 | 0.0005 | 0.0064 | 0.0284 | 0.0768 | 0.1562 |
| 5 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0024 | 0.0102 | 0.0312 |