



工程統計

李水彬Shuipin

2023/10/18

機率

學習重點

- 使用三個集合運算元, 交集, 聯集和餘事件。
- 機率的基本性質。
- 區分獨立事件與相依事件。
- 如何計算不同條件下的事件機率。

隨機實驗

- 資料的獲得包含有實驗, 觀察和調查等方法。
- 統計學上認知到這些獲得這些資料的過程具有於 不確定性,
- 其意謂若可重複進行相同的實驗或再次進行觀察, 所紀錄的資料可能不同。



隨機實驗

5 個人的身高分別為

$$x_1 = 169, x_2 = 170, x_3 = 171, x_4 = 176, x_5 = 164$$

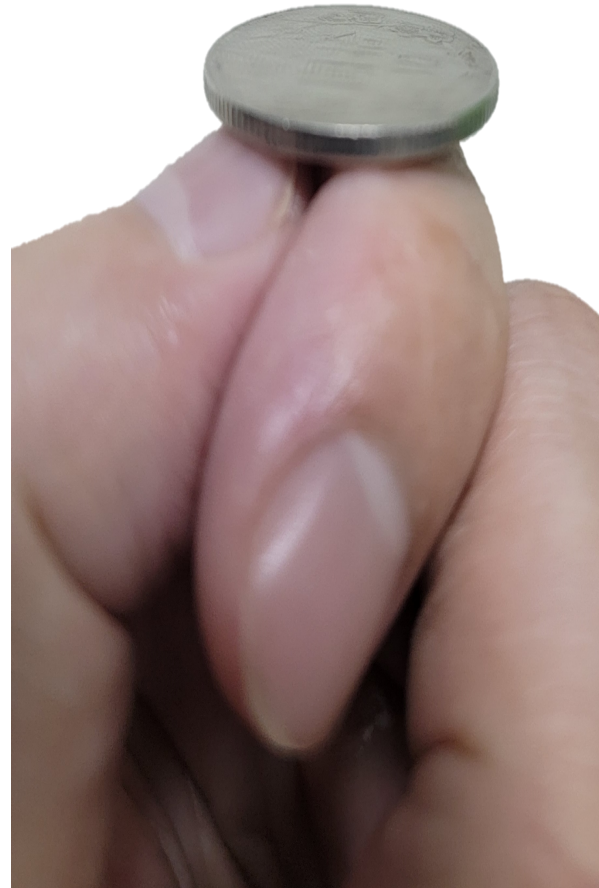
平均值為 $x = 170$ 。

10 種可能的選法

	169.0	169	169.0	169.0	170.0	170	170	171.0	171.0	176
	170.0	171	176.0	164.0	171.0	176	164	176.0	164.0	164
Sum	339.0	340	345.0	333.0	341.0	346	334	347.0	335.0	340
Ave	169.5	170	172.5	166.5	170.5	173	167	173.5	167.5	170

隨機實驗的定義

- 實驗前, 我們知道所有可能發生的結果, 但無法知道會產生何種結果。
- 實驗後, 可以確定發生的結果, 而且結果是唯一的。
- 可以重複進行此一實驗。



隨機實驗的例子

- 隨機從剛出廠的電燈泡群中抽取 3 顆電燈泡, 每一燈泡分類為: 亮 (good); 不亮 (bad), 並檢驗其損壞的個數。
- 本月餐廳服務品質調查中顧客的不滿意數。
- 投擲一公平的骰子, 觀察其面朝上之點數。
- 某廠牌汽車從桃園開到新竹的耗油量。

樣本空間 (sample space)

一個隨機實驗之所有可能產生的結果, 所構成之集合。

樣本空間-說明範例

1. 隨機從剛出廠的電燈泡群中抽取 3 顆電燈泡, 檢驗燈泡是否正常。亮 (良好, G) ; 不亮 (損壞, B) 樣本空間為

$$\Omega = \{GGG, GGB, GBB, GBG, BGG, BGB, BBG, BBB\}$$

2. 投擲一公平的骰子, 觀察其面朝上之點數。 樣本空間為

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

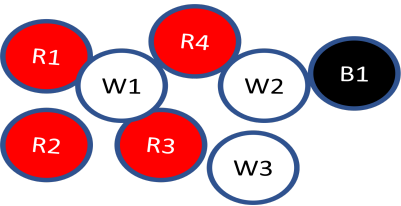
3. 投擲兩公平的骰子, 觀察其面朝上之點數。 樣本空間為

$$\Omega = \{(i, j) \mid i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6\}$$

共有 36 種可能結果。

範例

一個袋中有 4 顆紅球, 3 顆白球和 1 顆黑球, 今隨機抽出 2 顆 (不放回), 請問樣本空間為何?



R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R2	R2	R2	R2	R2	R2	R3
R2	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R4
R3	R3	R3	R3	R4	R4	R4	R4	W1	W1	W1	W2	W2	W3
W1	W2	W3	B1	W1	W2	W3	B1	W2	W3	B1	W3	B1	B1

事件

- 樣本空間的部分集合稱為事件。
- 簡單事件: 事件內只含有一種可能結果。
- 複合事件: 事件含有多個可能結果。

範例

- 集合 A : 點數和為 12

$$A = \{(6, 6)\}$$

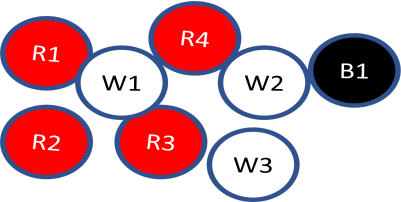
A 為簡單事件

- 集合 B : 點數和為 8

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

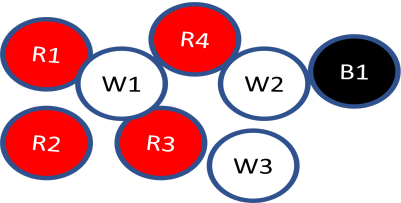
B 為複合事件

都是紅球的事件



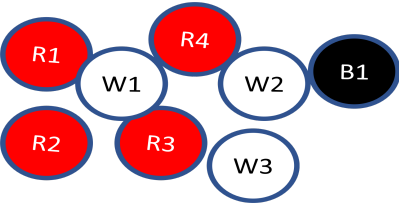
R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R2	R2	R2	R2	R2	R2	R3
R2	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R4
R3	R3	R3	R3	R4	R4	R4	R4	W1	W1	W1	W2	W2	W3
W1	W2	W3	B1	W1	W2	W3	B1	W2	W3	B1	W3	B1	B1

都是白球的事件



R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R2	R2	R2	R2	R2	R2	R3
R2	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R4
R3	R3	R3	R3	R4	R4	R4	R4	W1	W1	W1	W2	W2	W3
W1	W2	W3	B1	W1	W2	W3	B1	W2	W3	B1	W3	B1	B1

都是紅白各一的事件

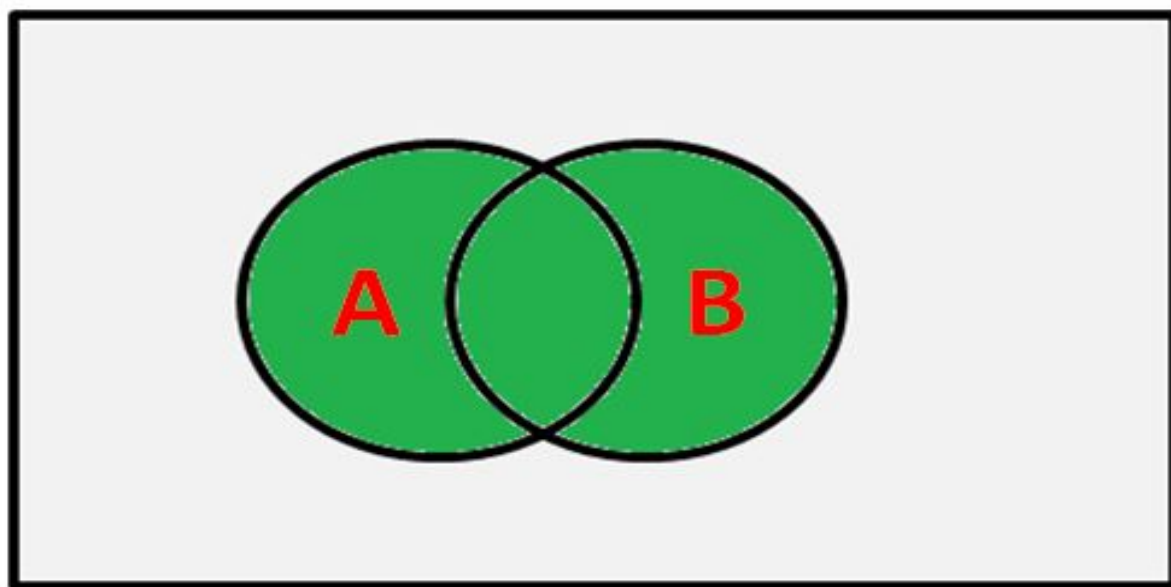


R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R2	R2	R2	R2	R2	R2	R3
R2	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R3	R4	W1	W2	W3	B1	R4
R3	R3	R3	R3	R4	R4	R4	R4	W1	W1	W1	W2	W2	W3
W1	W2	W3	B1	W1	W2	W3	B1	W2	W3	B1	W3	B1	B1

集合運算- 聯集

兩個事件 A, B 的聯集表示成

$$A \cup B$$



範例

樣本空間為

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

令 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 3, 5\}$ 。

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

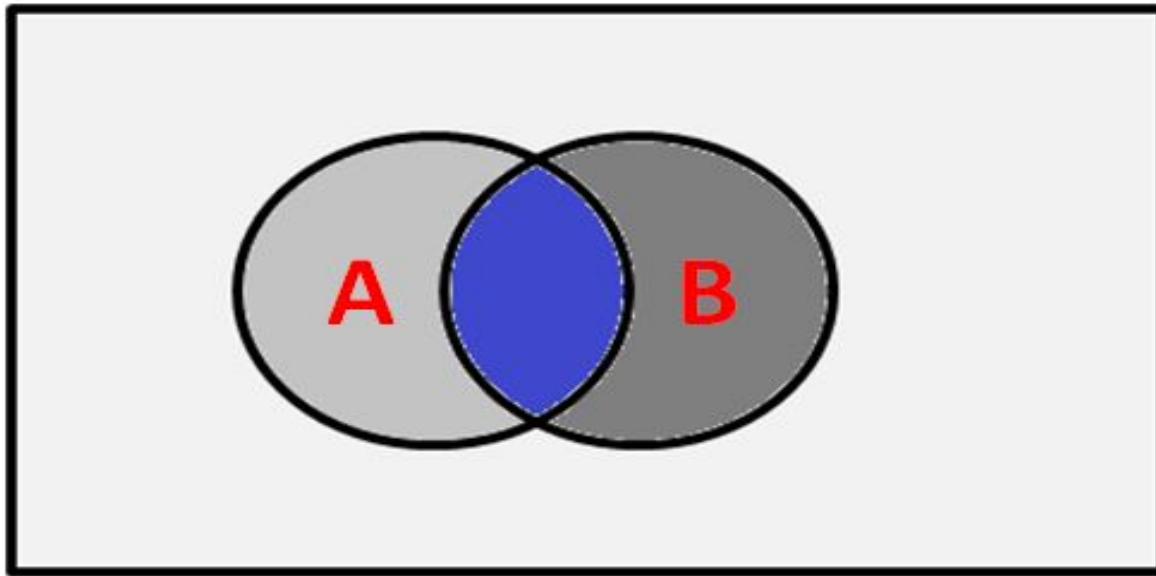
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

集合運算- 交集

兩個事件 A, B 的交集表示成

$$A \cap B$$



A, B 兩集合的內共同的元素挑選出來, 如藍色部分。

範例

樣本空間為

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

令 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 3, 5\}$ 。

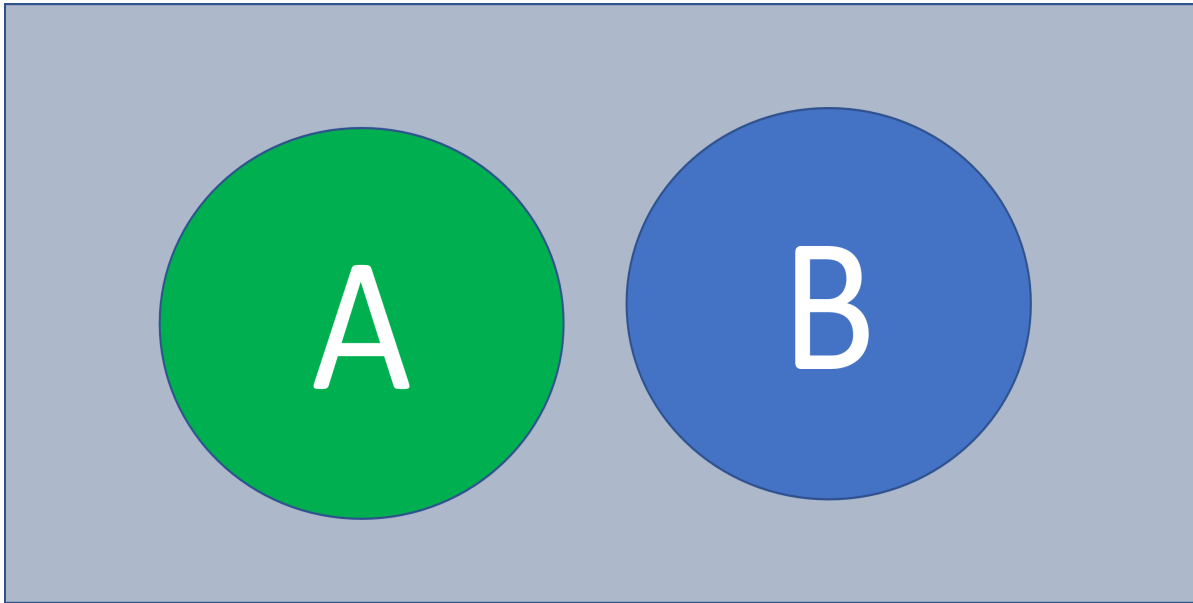
$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cap C = \{1, 3\}$$

$$B \cap C = \{\} = \Phi$$

互斥

若兩個集合 A, B 沒有共同的元素稱為互斥集合。



餘事件

A 餘事件 A^c , 給定一個樣本空間 Ω 下, A^c 為 Ω 扣除 A 的元素後剩下的元素構成的集合。



範例

樣本空間為

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

令 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 3, 5\}$ 。

$$A^c = \{4, 5, 6\}$$

$$B^c = \{1, 3, 5\}$$

$$C^c = \{2, 4, 6\}$$

事件分割

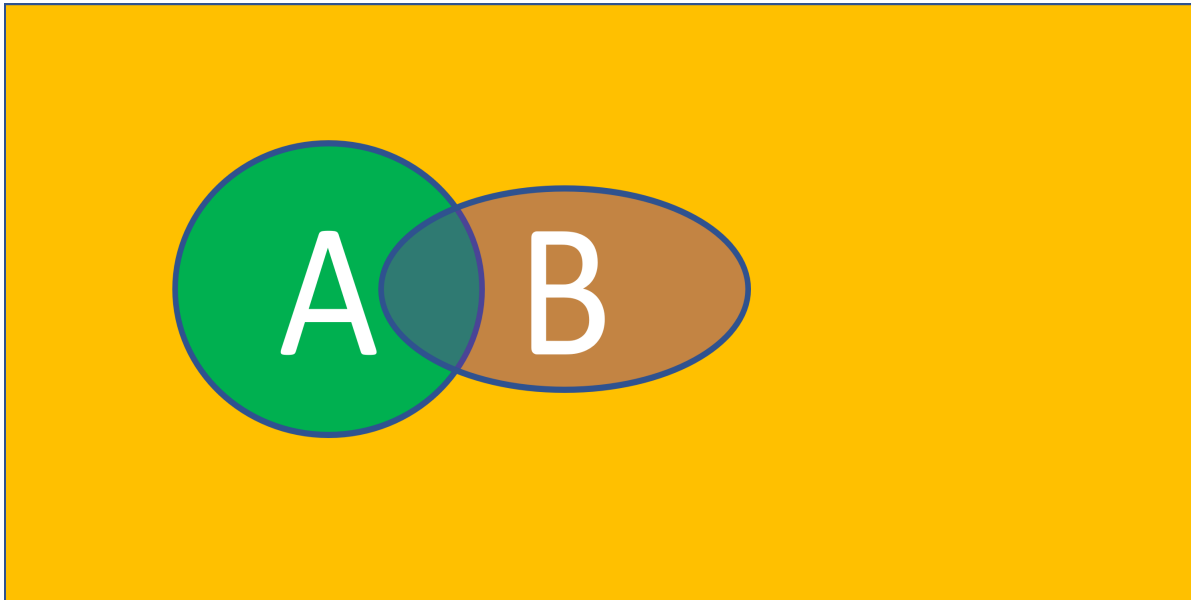
任一事件 A 可被另一事件 B 分割成兩個互斥事件。



事件分割

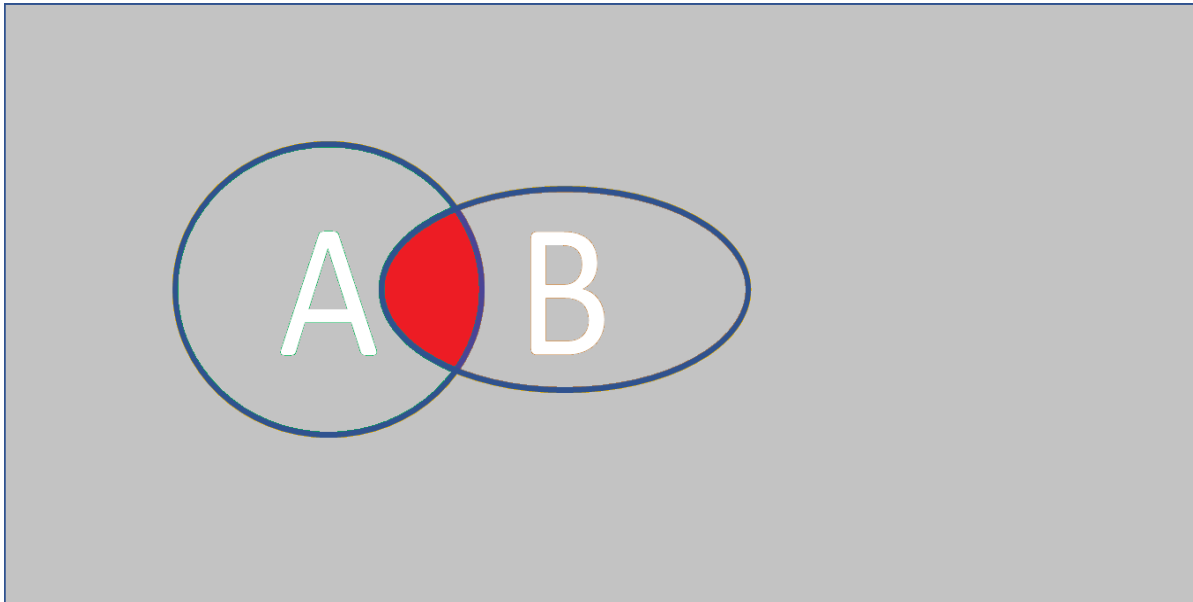
Ω 本校所有學生。

事件 A 代表住宿生，事件 B 代表工管系學生。



事件分割

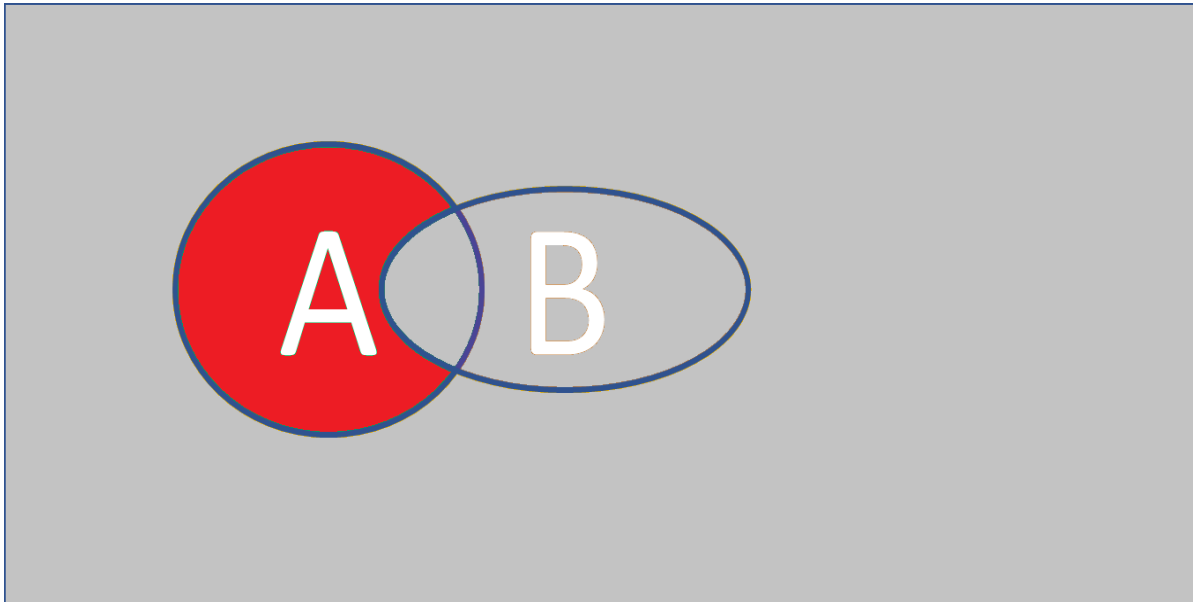
事件 A 代表住宿生，事件 B 代表工管系學生。
 $A \cap B$: 工管系住宿生。



事件分割

事件 A 代表住宿生，事件 B 代表工管系學生。

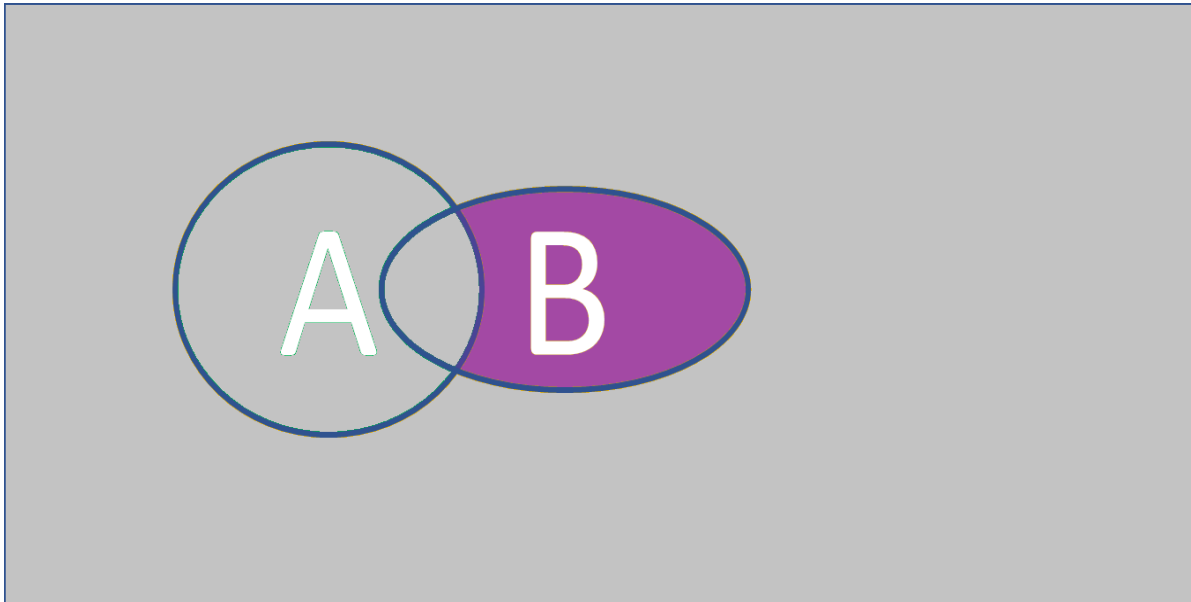
$A \cap B^c$: 非工管系住宿生。



事件分割

事件 A 代表住宿生，事件 B 代表工管系學生。

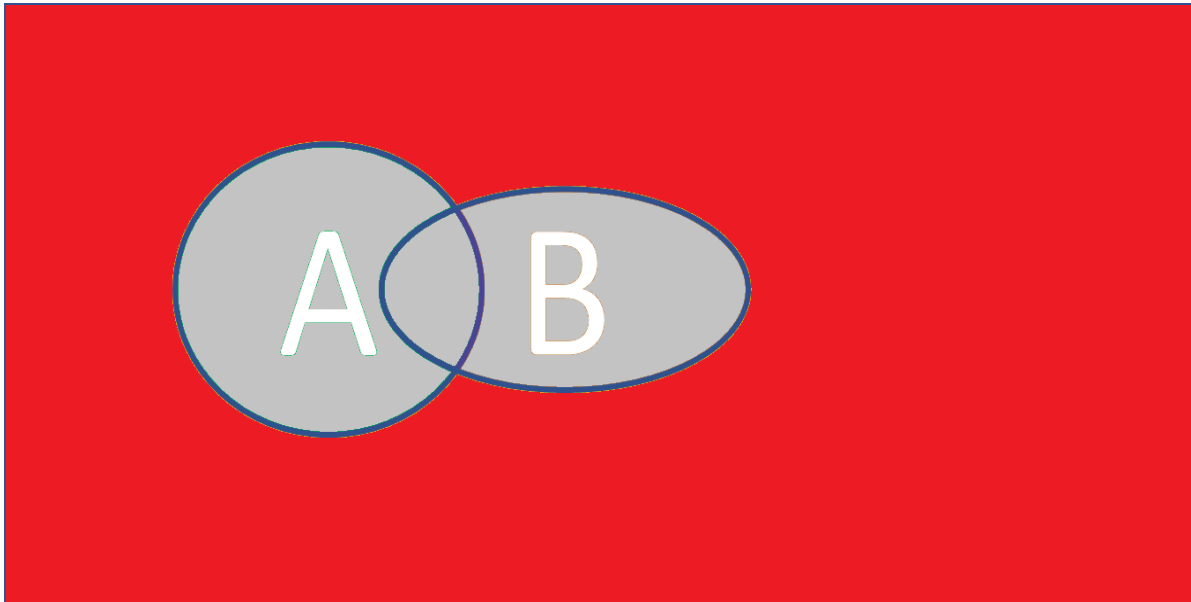
$A^c \cap B$: 工管系沒有住宿的學生。



事件分割

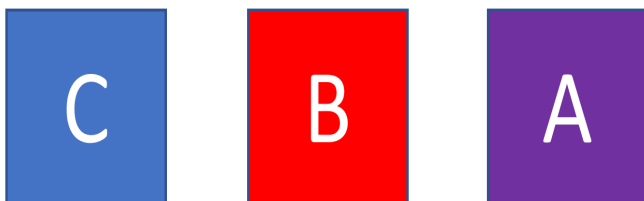
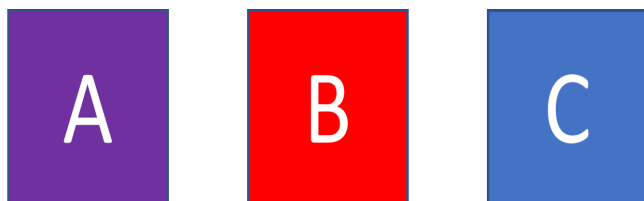
事件 A 代表住宿生，事件 B 代表工管系學生。

$A^c \cap B^c$: 非工管系且沒有住宿的學生。



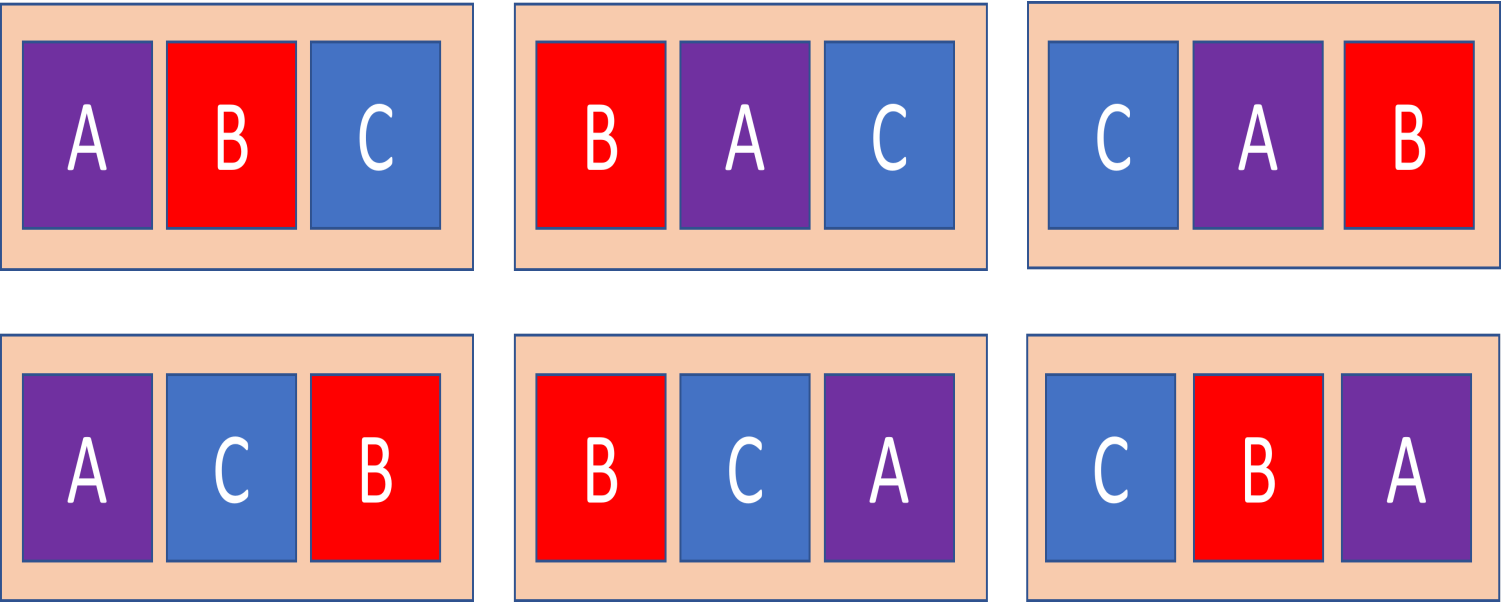
排列Permutation

排列為有限的事物, 符號, 或代號按照給定的次序安排, 而排列數為這些所有可能安排且次序不相同的最大數目。



A, B, C 代表三個不相同的事物

排列Permutation



排列數

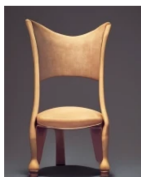
此一排列共有 r 個位置, 第一個位置有 n 種選擇, 第二個位置有 $n - 1$ 種選擇, 第三個位置有 $n - 2$ 種選擇, 而第 r 個位置有 $n - r + 1$ 個選擇, 所以

$$P_r^n = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

當 $r = n$ 時, $P_n^n = n!$ 代表 n 個元素的排列數。例如,

$$P_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

關於 P_r^n 的機制說明



使用AI繪製 <https://www.craiyon.com/>

階乘 $n!$ 的意思

- 公式: $n! = n \times (n - 1)!$
- $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
- $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$
- $6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$

範例

在集合 $\{a, b, c, d\}$ 中任抽兩個排列, 共有 $P_2^4 = 4 \times 3 = 12$ 種。

$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$

- a 是第一個 ab, ac, ad
- b 是第一個 ba, bc, bd
- c 是第一個 ca, cb, cd
- d 是第一個 da, db, dc

組合

- 組合為一個集合的部分集合。
- 組合數指部分集合的元素數目相同但元素不全相同的個數。

假設 $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$A = \{a, b, c\}, B = \{b, a, c\}, C = \{a, b, f\}$$

A, B 為相同組合， A, C 為不同組合。

- 任意三個元素都可以排出 $P_3^3 = 6$ 種。

排列 vs 組合

集合 $\{a, b, c\}$ 有

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

這 6 種排列為同一種組合。

組合數計算公式

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!}$$

$$C_r^n = \frac{\text{n 個選r 個的排列數}}{\text{r 個物件排列數}}$$

分母是排列數為相同元素的重複組合數。

說明

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

- 選三個的排列數

$$P_3^7 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

- 任意三個的排列數(重複次數)

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

- 選三個的組合數

$$C_3^7 = \frac{P_3^7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{6}} = 35$$

組合的性質

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

其意為從 n 個元素中挑選任意 r 個與挑選任意 $n - r$ 個是相同的一件事。

例如, 有6個同學要去內灣烤肉, 有2個人要騎一輛機車, 另外 4 個人開一輛汽車前往。
所以, 從6人中抽選 2 人騎機車和抽選 4 人開一輛汽車是相同的意義。

$$C_2^6 = C_4^6$$



範例

請問從集合中 $\{a, b, c, d\}$ 任抽兩個的組合數。

ab, ac, ad, bc, bd, cd

- $ab = ba$
- $ac = ca$
- $ad = da$
- $bc = cb$
- $bd = db$
- $cd = dc$

事件機率的衡量方式

- 擲一顆骰子，出現奇數 $\{1, 3, 5\}$ 的機率？
- 擲一枚銅板，出現正面的機率？
- 檢驗一個燈泡，不亮的機率？

這些通稱為『**隨機實驗**』，是否會發生預期的結果是不確定的。

『**機率**』probability 一詞用來測度表某一事件發生的可能性，其數值越大表示事件發生的可能性越高，越小就越不可能發生。

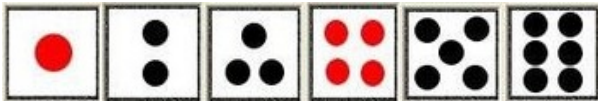
古典機率

樣本空間的每一個元素發生的機率相同(或是已知)。

- 投擲一個銅板, 樣本空間的元素為正面與反面, 所以兩者發生的機率各為 $\frac{1}{2}$;



- 擲一顆骰子, 樣本空間為 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 骰子每一面出現的機率相同, 皆為 $\frac{1}{6}$;



古典機率- 事件機率

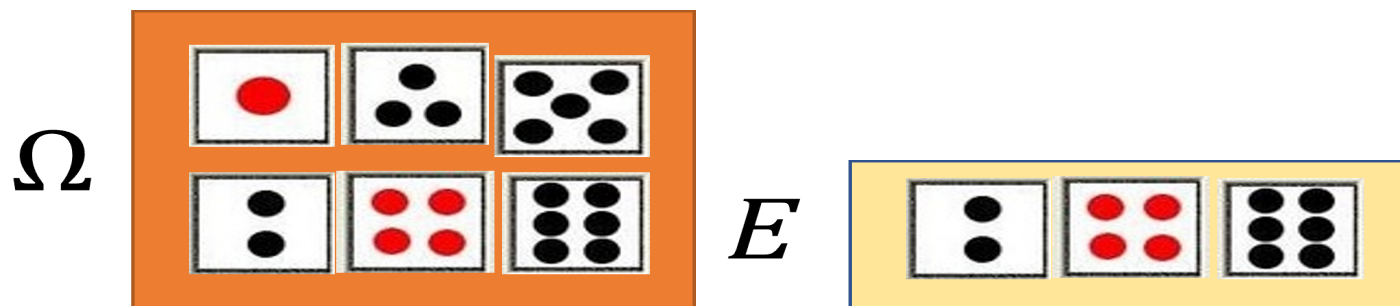
事件 E , 其發生機率為 $P(E)$ 定義為

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)}$$

其中 $\#(E)$ 與 $\#(\Omega)$ 代表事件 E 與樣本空間 Ω 的元素個數。

範例

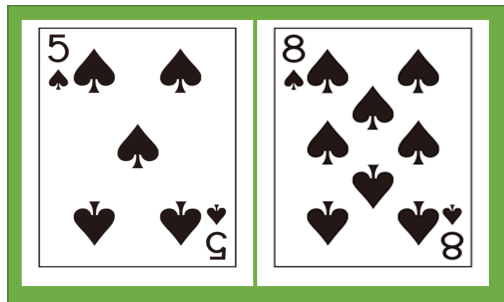
擲一顆公平的骰子, 樣本空間為 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 請問出現偶數 $E = \{2, 4, 6\}$ 的機率?



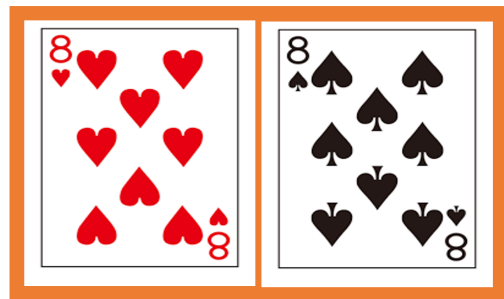
範例

從一副撲克牌抽出二張牌, 請問

1. 二張牌都是黑桃的機率?



2. 二張牌成對的機率?



3. 其中一張K的機率?

解答:

$$\cdot \#(\Omega) = C_2^{52} = \frac{52 \times 51}{2 \times 1} = 26 \times 51$$

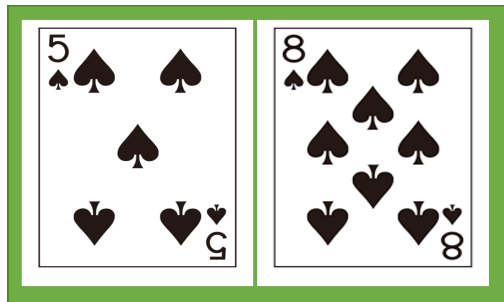
$$P(\text{都是黑桃}) = \frac{C_2^{13} C_0^{39}}{26 \times 51}$$

$$= \frac{\frac{13 \times \cancel{12}^6}{\cancel{2} \times 1} \times 1}{26 \times 51} = \frac{\cancel{13} \times \cancel{6}^2}{\cancel{26}^2 \times \cancel{51}^{17}}$$

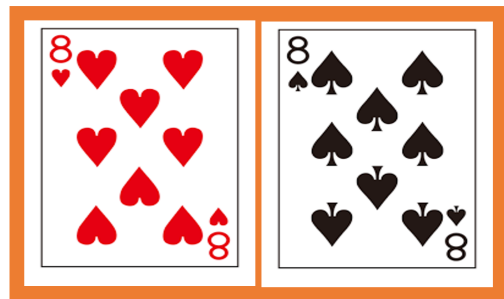
範例

從一副撲克牌抽出二張牌, 請問

1. 二張牌都是黑桃的機率?



2. 二張牌成對的機率?



3. 其中一張K的機率?

解答:

$$\cdot \#(\Omega) = C_2^{52} = \frac{52 \times 51}{2 \times 1} = 26 \times 51$$

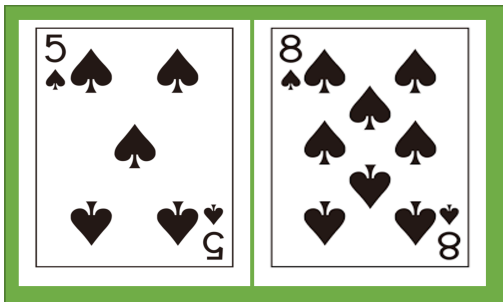
$$P(\text{二張牌成對}) = \frac{C_1^{13} C_2^4}{26 \times 51}$$

$$= \frac{\frac{13 \times 6}{\cancel{2} \times 1}}{26 \times 51} = \frac{\cancel{13} \times \cancel{6}^2}{\cancel{26}^2 \times \cancel{51}^{17}}$$

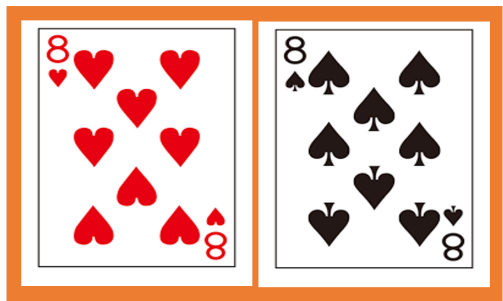
範例

從一副撲克牌抽出二張牌, 請問

1. 二張牌都是黑桃的機率?



2. 二張牌成對的機率?



3. 其中一張K的機率?

解答:

$$\cdot \#(\Omega) = C_2^{52} = \frac{52 \times 51}{2 \times 1} = 26 \times 51$$

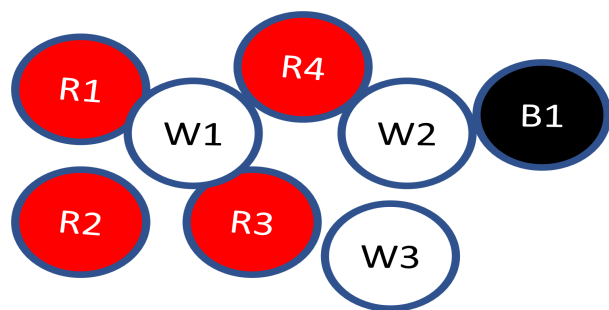
$$P(\text{一張}K) = \frac{C_1^4 C_1^{48}}{26 \times 51}$$

$$= \frac{4 \times 48}{26 \times 51} = \frac{\cancel{4}^2 \times \cancel{48}^{16}}{\cancel{26}^{13} \times \cancel{51}^{17}}$$

範例

一個袋中有 4 顆紅球, 3 顆白球和 1 顆黑球, 今隨機抽出2顆(不放回), 請問:

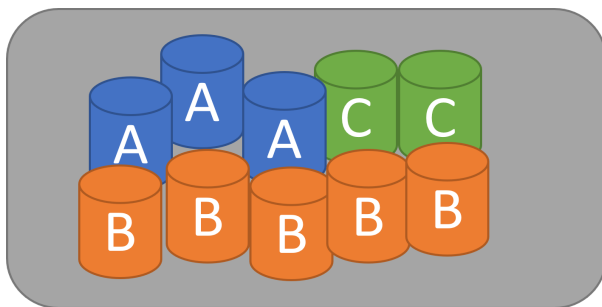
1. 兩顆都是紅球的機率?
2. 一個白球的機率的機率?
3. 沒有抽中黑球的機率?



範例

假設一批貨有 3 個 A 級品, 5 個 B 級品和 2 個 C 級品, 今隨機選購3個產品, 請問:

1. 都是 A 級品機率?
2. 有 1 個 C 級品機率?
3. 沒有 C 級品的機率?



範例



隨機抽出5張是葫蘆的機率？

相對次數法

有限性次數 N 的觀察中, 若事件 A 發生的次數為 $\#(A)$, 則事件 A 發生的機率定義為

$$P(A) = \frac{\#(A)}{N}$$

範例

投擲一個銅板 20 次, 試驗兩次的紀錄如下:

- 試驗一: 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1
- 試驗二: 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1

在試驗一, 銅板出現正面的相對次數為0.6, 在試驗二, 銅板出現正面的相對次數為0.5。

主觀機率

反應我們對事件發生的信心程度。

- 律師說他獲勝的機率高過90%。
- 教練說球隊必定獲得冠軍。
- 被當掉的機率接近0%。

機率的性質

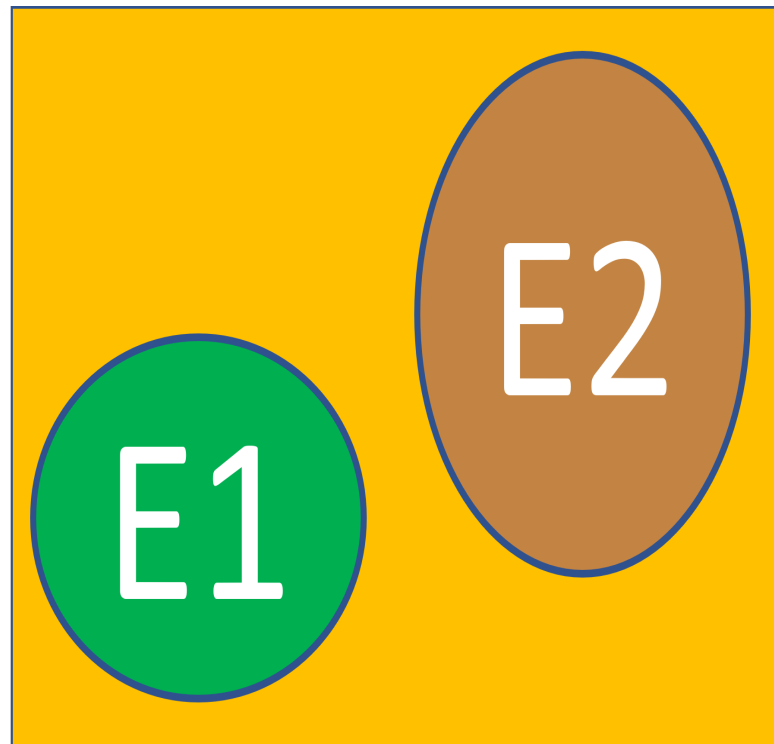
- 任意事件 $E \subset \Omega$, 滿足

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

- $P(\Omega) = 1$

- 任兩個互斥事件 E_1, E_2 ,

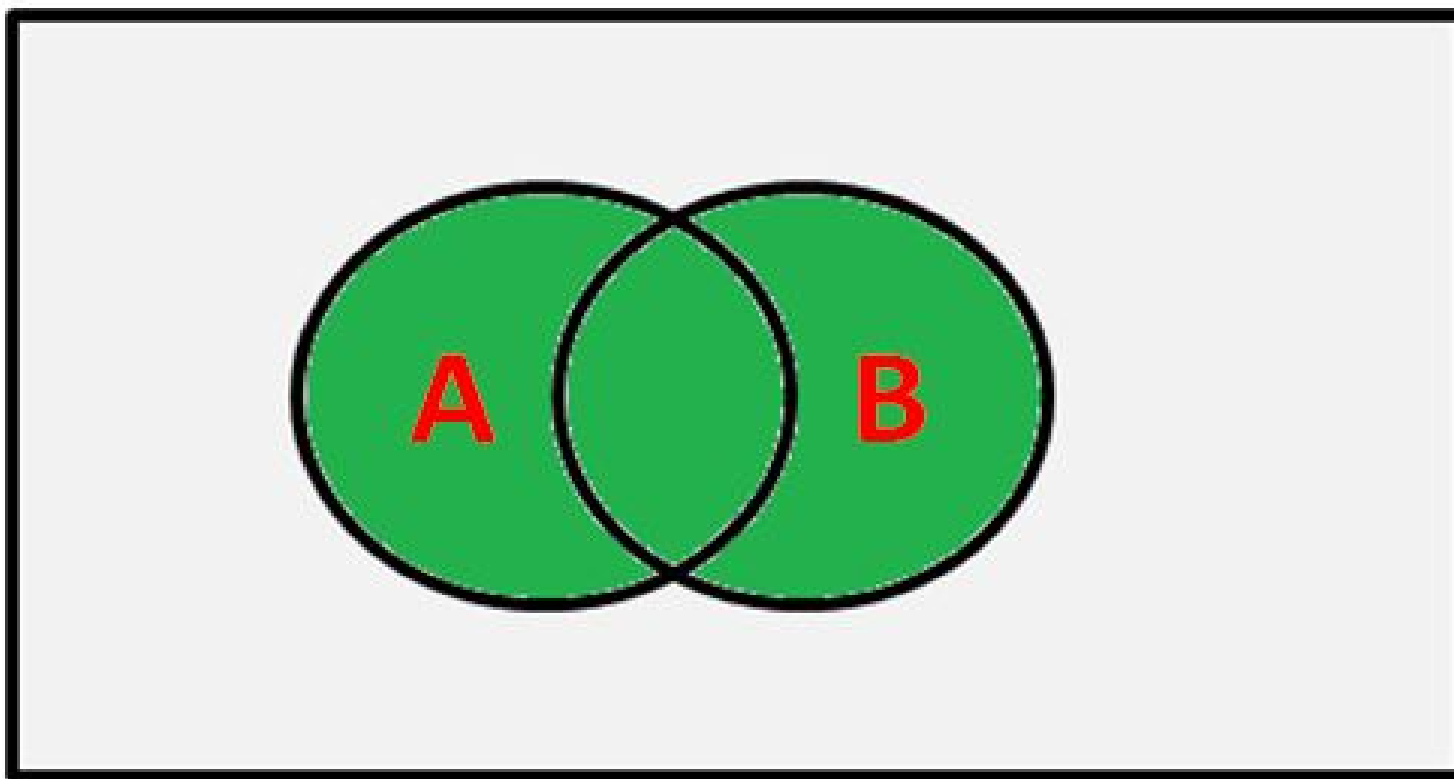
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$



機率的加法法則

若事件 $A, B \subset \Omega$, 則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



範例

假設事件 $A, B \subset \Omega$, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ 且 $P(A \cap B) = 0.1$, 求 $P(A \cup B)$?

根據加法法則,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$$

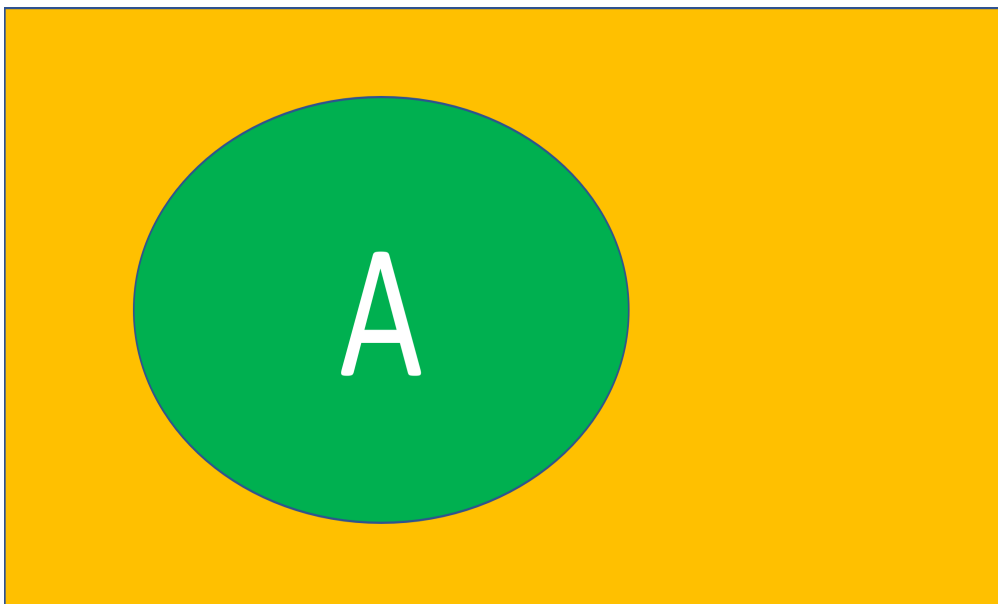
餘事件法則

已知 $A \subset \Omega$, 則

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$\Rightarrow$

$$1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$



條件機率與獨立事件

有沒打工	男	女	合計
有	125	57	182
無	117	85	202
合計	242	142	384

- 打工同學之中, 男生的比例:

$$P(A | B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 男同學之中, 打工的比例:

$$P(B | A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

A 代表抽中男生的事件

B 代表抽中打工同學的事件

範例

- 從一副撲克牌抽出二張牌, 已知第一張為黑桃, 請問兩張都是黑桃的機率?
- 從一副撲克牌抽出二張牌, 已知其中一張為黑桃, 請問兩張都是黑桃的機率?

令 A_1 為第一張是黑桃的事件, A_2 為第二張是黑桃的事件。 $A_1 \cap A_2$ 代表兩張都是黑桃的事件, $A_1 \cup A_2$ 代表其中一張為黑桃的事件。

範例

一個袋中有 4 顆紅球, 3 顆白球和 1 顆黑球, 今隨機抽出2顆 (不放回), 請回答以下各題:

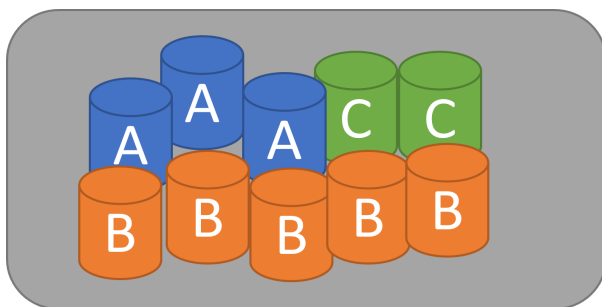
- 已知兩球顏色相同, 請問是紅色的機率為何?
- 已知兩球顏色不相同, 請問沒有紅色的機率為何?

令 R 代表兩球顏色紅色事件, W 代表兩球顏色白色事件, B 代表兩球顏色黑色事件, D 代表兩球顏色不相同事件。

範例

假設一批貨有 3 個 A 級品, 5 個 B 級品和 2 個 C 級品, 今隨機選購 3 個產品, 請問沒有選中 *C* 級品的機率?

已知沒有選中 *B* 產品, 請問亦沒有選中 *C* 產品的機率?



條件機率的計算公式

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$\Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

範例

假設有一個系統包含兩個相同元件 A, B , 當兩個元件皆失效則此系統失效。

假設 A 元件失效的機率為 0.2, B 元件在 A 元件失效下, 其失效的機率為 0.7。請問系統失效的機率為何?

獨立事件

- 『獨立』乃指兩著互不影響, 『獨立事件』指兩個事件發生與否互不影響。
- 兩個事件 A, B 限制其中任一個事件發生下, 都不改變另一事件發生的機率。
- 兩個事件 A, B 相互獨立, 若且維若

$$P(A \mid B) = P(A), P(B \mid A) = P(B)$$

⇒

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

+ 倘若兩事件不是相互獨立, 則稱為相依事件(dependent events)。

觀念

- 獨立事件是指兩個事件發生的關聯性, 用事件發生的機率來描述事件間的依存關係;
- 互斥事件是比較兩事件內的元素。
- 兩事件『互斥』, 使得兩事件必定不可能同時發生, 也就使得兩事件發生與否產生了『對立性』。互為對立的兩方, 就是相互依存的兩方, **必不是獨立事件**。
- 倘若事件 A 發生, 事件 B 必然不發生; 或者事件 B 發生, 事件 A 必然不發生, 換言之, 事件 A, B 是否發生彼此間產生了關聯。

獨立 vs 互斥

- 擲銅板實驗，第二次出現的結果與第一次的結果是獨立的。

A 是第一次出現正面， B 是第二次出現正面。

若銅板是公平的 ($P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$)，兩次都是正面的機率為

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

這個算法是假設前後兩次擲銅板是相互獨立。

獨立 vs 互斥

- 從一副牌抽出五張， A 是葫蘆的事件， B 是同花順的事件。

但葫蘆和同花順是互斥的，這五張牌不可能既是葫蘆又是同花，也就是

全部組合數：

$$C_5^{52} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2598960$$

抽出葫蘆的機率

$$P(A) = \frac{C_1^{13} C_3^4 C_1^{12} C_2^4}{C_5^{52}} = \frac{13 \times 4 \times 12 \times 6}{C_5^{52}} = 0.00144$$

抽出同花順的機率

$$P(A) = \frac{10 \times 4}{C_5^{52}} = \frac{40}{C_5^{52}} = 1.54 \times 10^{-5}$$

$$A \cap B = \{\} = \text{空集合}$$

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$$

貝氏定理

<https://fb.watch/nve7UQshTi/> <https://covid19.nctu.edu.tw/article/1228>

入境普篩迷思解析

2020/08/22

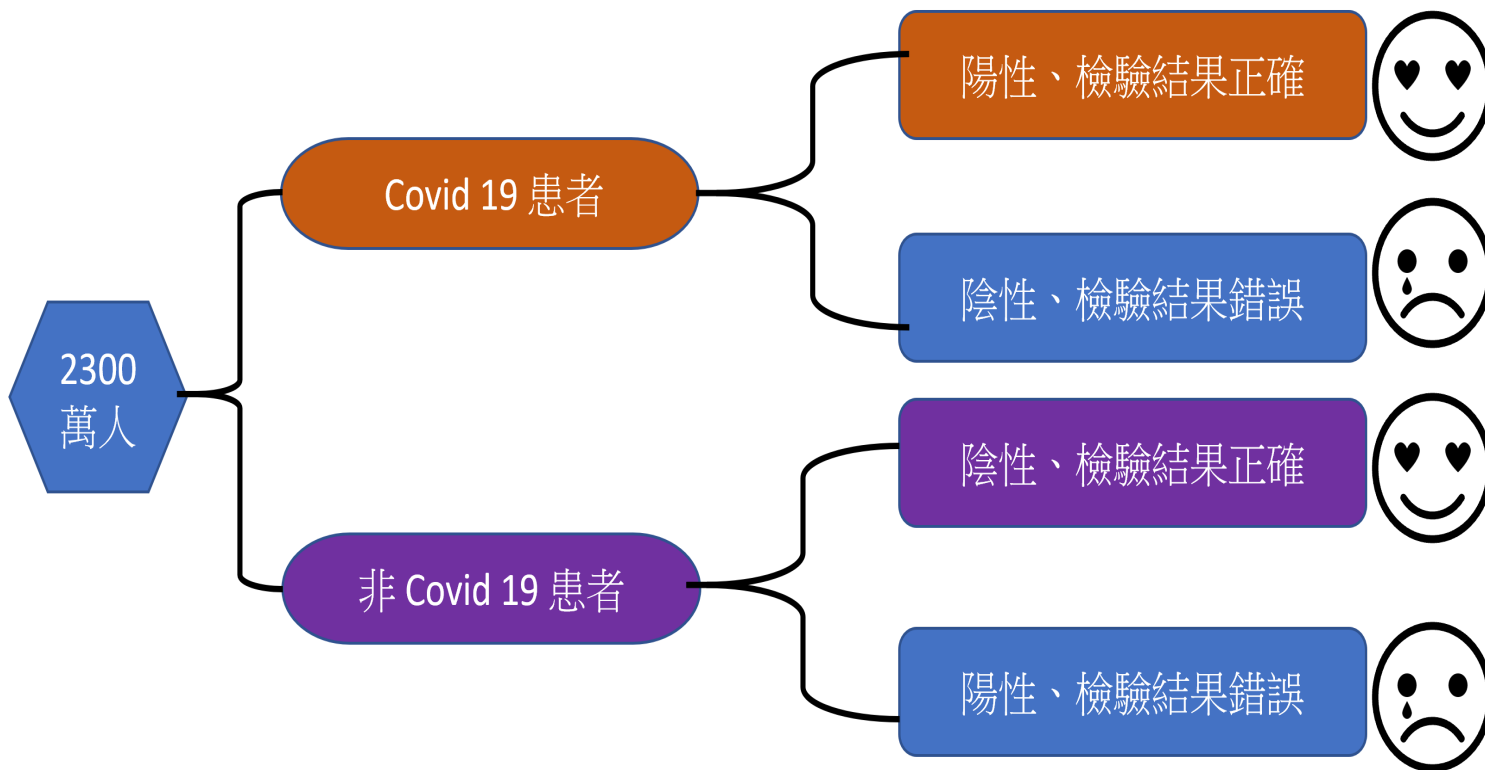
我國1月至今入境人數約250,000人，假設以盛行率0.2%來推測，預計有500人受到感染，若入境者全部於入境時進行篩檢(試劑敏感性90%、特異性95%)，篩檢結果如下：

COVID-19(武漢肺炎)

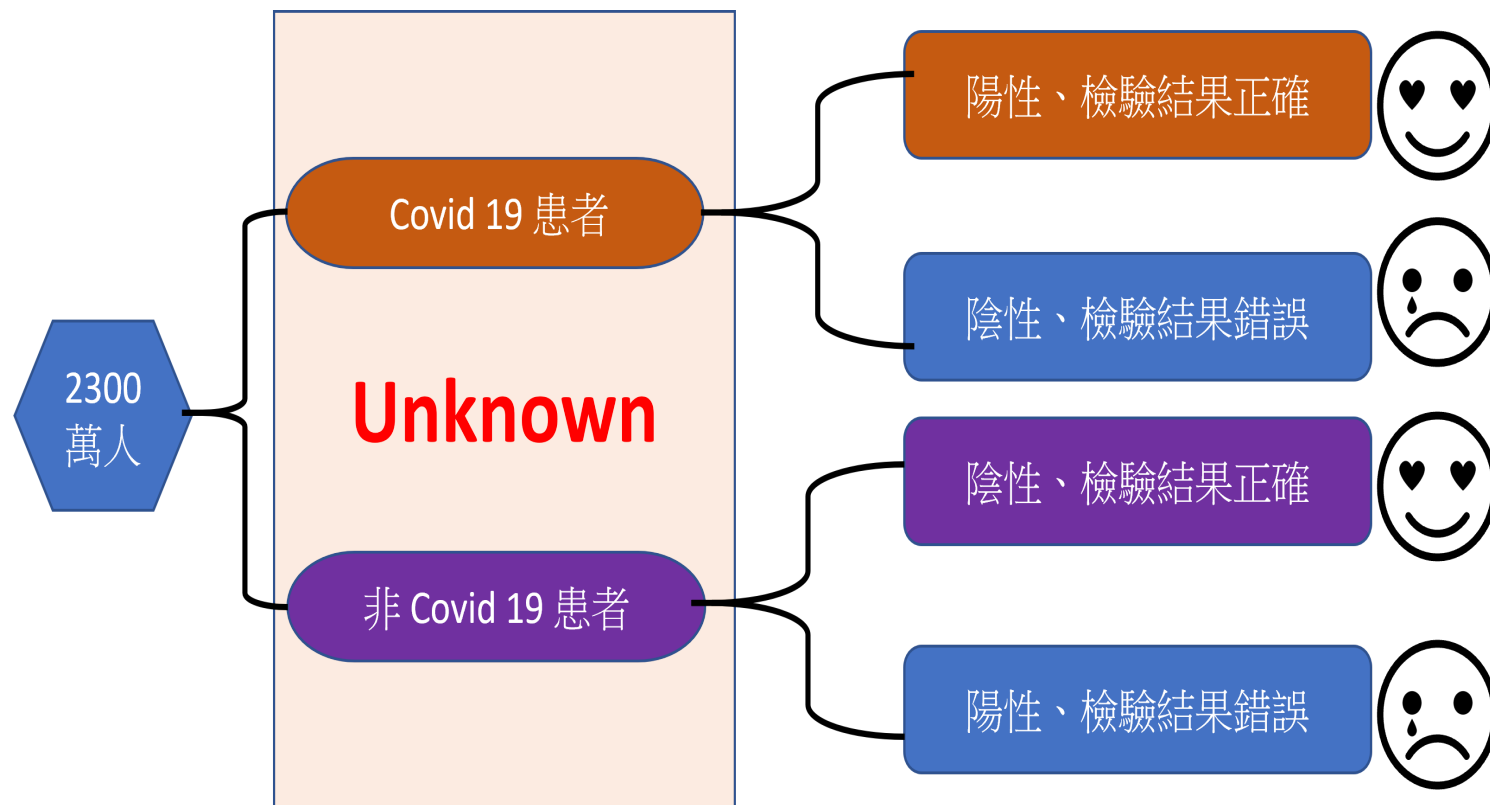
		+	-	
入境普篩	+	450 陽性個案	12,475 偽陽性	12,925
	-	50 偽陰性	237,025 真正陰性	237,075
		500	249,500	250,000 (單位：人)

中央流行疫情指揮中心

貝氏定理



貝氏定理



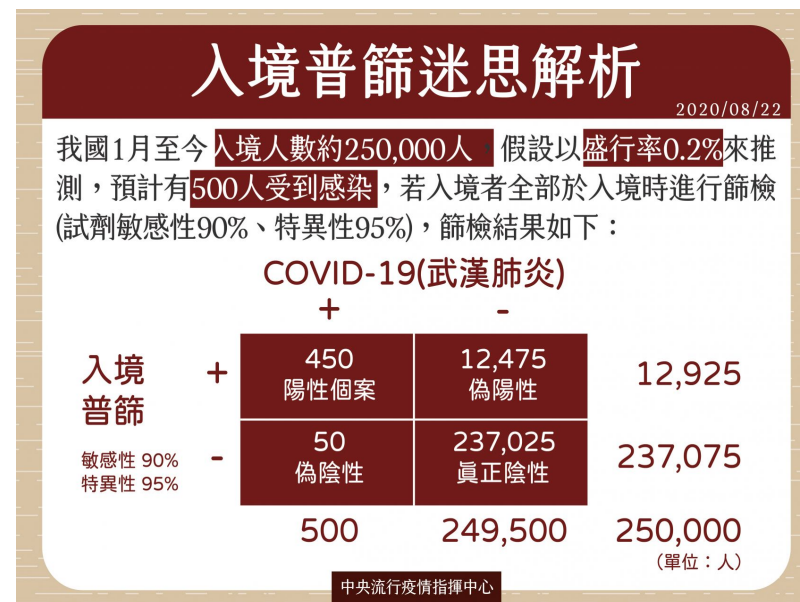
貝氏定理

特異性和敏感性都是指得到正確檢驗結果的機率。

敏感性 = $P(\text{採檢為陽性} \mid \text{Covid19患者})$

特異性 = $P(\text{採檢為陰性} \mid \text{不是Covid19患者})$

- 偽陽性: 採檢為陽性，但非Covid 19 患者。關起來!!
- 偽陰性: 採檢為陰性，但是Covid 19 患者。趴趴走!!



貝氏定理

檢驗的過程就是對工廠的產品分類的一個過程, 將工廠的產品依檢驗結果分成一群為檢驗陽性(不良品) 和一群檢驗為陰性(良品)。

陰性=良品

陽性=不良
品

真實的檢驗



範例

假設 A 型流感患者快篩檢驗為陽性的比例為 0.6, 非 A 型流感患者快篩檢驗為陽性的機率為 0.1。某位醫生依其臨床判斷決定一個病患是否該接受 A 型流感快篩檢驗, 其送驗病患中有 9 成是 A 型流感患者, 請問檢驗結果為陽性的比例為何?

範例

某工廠有 4 條生產線 A_1, A_2, A_3, A_4 , 其產量與不良率如下表:

生產線	產量比	不良率
A_1	20%	2.0%
A_2	40%	3.0%

A_3	30%	4.0%
A_4	10%	1.0%

-
- 請問此工廠產品的不良率為何?
 - 已知產品為不良品, 其來自 A_1, A_2, A_3, A_4 的機率分別為何?

本章結束