



離散型機率分配-1

李水彬Shuipin

2023/10/25

離散型機率分配

- 一致分配 (uniformly distribution)
- 白努利分配 (Bernoulli distribution)
- 二項分配 (binomial distribution)
- 超幾何分配 (hyper-geometric distribution)
- 幾何分配 (geometric distribution)
- 卜瓦松分配 (Poisson distribution)

一致分配

假設群體中每一個數值 x_1, \dots, x_N 被抽中的機率 **相同**，隨機變數 X 為抽中的數值，則 X 的機率分配為

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

範例(骰子)

一個公平的骰子, 令 X 代表出現的點數, 其機率分配函數為

$$f(i) = P(X = i) = \frac{1}{6}, i = 1, \dots, 6$$

$X(\text{☐}) = 1$, 簡寫為 $X = 1$, $X(\text{☐}) = 2$, 簡寫為 $X = 2$,
 $X(\text{☐}) = 3$, 簡寫為 $X = 3$, $X(\text{☐}) = 4$, 簡寫為 $X = 4$,
 $X(\text{☐}) = 5$, 簡寫為 $X = 5$, $X(\text{☐}) = 6$, 簡寫為 $X = 6$ 。

範例(彩金)

一個公平的骰子, 令 X 代表出現的點數, 彩金 Y 為 X 的函數

$Y(\text{▣})=20, Y(\text{▢})=50, Y(\text{□})=120, Y(\text{▤})=30, Y(\text{▥})=40, Y(\text{▦})=40$ 。

隨機變數 Y 的可能值為

$y_1 = 20, y_2 = 50, y_3 = 120, y_4 = 30, y_5 = 40, y_6 = 40$,

它的機率分配為

$$f(y_i) = \frac{1}{6}, i = 1, \dots, 6$$

與隨機變數 X 相同。

期望值與變異數

$$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

就是一般母體平均數與變異數的計算公式。

範例(摸彩)

假設摸彩箱內有三顆彩球, 黃, 紅和藍, 黃色可折價 20 元, 紅色彩球可折價 15 元, 藍色彩球可折價 10 元。令隨機變數 X 代表顧客折價金額, 請問 X 的期望值與變異數。

根據題意, X 的機率分配為

$$f(x) = \frac{1}{3}, x = 10, 15, 20$$

$$\mu = \frac{10+15+20}{3} = 15$$

$$\sigma^2 = \frac{(10-15)^2 + (15-15)^2 + (20-15)^2}{3} = \frac{50}{3}$$

範例(接續骰子)

擲一個公平的骰子, 令 X 代表出現的點數, 請問 X 的期望值與變異數?

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \\E(X^2) &= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6} \\Var(X) &= E(X^2) - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 \\&= \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

範例(接續彩金)

彩金 Y 的可能值為

$$y_1 = 20, y_2 = 50, y_3 = 120, y_4 = 30, y_5 = 40, y_6 = 40, y_6 = 40$$

它的期望值為

$$E(Y) = \sum_{i=1}^6 y_i f(y_i) = \sum_{i=1}^6 (y_i \times \frac{1}{6})$$

$$E(Y) = \frac{20 + 50 + 120 + 30 + 40 + 40}{6} = \frac{300}{6} = 50$$

範例(接續彩金)

變異數(Variance)

Y(彩金)	20	50	120	30	40	40
離差	-30	0	70	-20	-10	-10
離差平方	900	0	4900	400	100	100

離差平方和為 6400，故變異數為

$$\sigma^2 = Var(Y) = \frac{6400}{6} = 1066.67$$

標準差為

$$\sigma = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{1066.67} = 32.66$$

練習

年終摸彩箱內有五張彩券，分別為500元，400元，200元和兩張100元。請問彩券的期望值、變異數和標準差分別為多少？

練習(解答)

期望值為

$$E(Y) = \frac{500 + 400 + 200 + 100 + 100}{5} = \frac{1300}{5} = 260$$

練習(解答)

Y(彩券)	500	400	200	100	100
離差	240	140	-60	-160	-160
離差平方	57600	19600	3600	25600	25600

離差平方和為 $57600 + 19600 + 3600 + 25600 + 25600 = 132000$ ，故變異數為

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \frac{132000}{5} = 26400$$

標準差為

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{26400} = 162.48$$